Sahand University of Technology

Lecture 4-2
Random Processes(Part 2)
فرآیندهای تصادفی(بخش دوم)
فرآیند تصادفی

Dr. Shamekhi
Summer 2016

بردار تصادفی

پیش از آغاز مباحث مربوط به فرآیند تصادفی به بررسی مفهوم بردار تصادفی می‌پردازیم:

مجموعه‌ای **محدود** از متغیرهای تصادفی که از فضای احتمال مشترک اخذ شده‌اند بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ می‌باشد.

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots X_n)^{\boldsymbol{T}}$$

$$\Omega \xrightarrow{X_1} \mathbb{R}$$

$$\Omega \xrightarrow{X_2} \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

$$\Omega \xrightarrow{X_n} \mathbb{R}$$

$$\Omega \xrightarrow{X_1, X_2, \cdots X_n} \mathbb{R}^{n}$$

اما فرآیند تصادفی مجموعه‌ای **نامحدود** از متغیرهای تصادفی که از فضای احتمال مشترک اخذ شده‌اند است.

$$\{X_n, n = 1,2, \dots\}$$

- خواص

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n}{\partial \boldsymbol{x}} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n)$$

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\underline{-\infty}}^{\boldsymbol{x}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

$$\mathrm{E}\{g(\boldsymbol{x})\} = \int_{\underline{-\infty}}^{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

$$\phi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\omega}) \triangleq \mathrm{E}\left\{e^{j\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{X}}\right\} = \int_{\underline{-\infty}}^{\overline{+\infty}} e^{j\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{F}^{-1}\{\phi_{\boldsymbol{X}}(-\boldsymbol{\omega})\} = \int_{\underline{-\infty}}^{\overline{+\infty}} \phi_{\boldsymbol{X}}(-\boldsymbol{\omega}) e^{j\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{(2\pi)^n}$$

برای دو بردار تصادفی، توابع احتمال توام تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots X_n)^{\boldsymbol{T}} \qquad \boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots Y_m)^T$$

$$F_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \triangleq P\{\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y}\}$$

$$f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \triangleq \frac{\partial^{n+m}}{\partial \boldsymbol{X} \partial \boldsymbol{Y}} F_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$\phi_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \triangleq \mathrm{E}\left\{e^{j\left(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{X}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{Y}\right)}\right\} = \int_{\underline{-\infty}}^{+\infty}\int_{\underline{-\infty}}^{+\infty} e^{j\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i + \sum_{i=1}^{n} v_i Y_i\right)} f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

احتمالات شرطی دو بردار تصادفی:

به شروط مربوط به Y دقت شود.

$$\boxed{\begin{cases} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \dfrac{F_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})} \\ \qquad \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y} \\ f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \dfrac{f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})} \\ \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \end{cases}}$$

- **استقلال دو بردار تصادفی**

$$\boldsymbol{X} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{Y}$$

سه شرط معادل که برقرار هریک به معنای استقلال بردارهای $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$ است.

$$F_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}),$$

$$f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}),$$

$$\phi_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \phi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u})\phi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{v}).$$

- **توابع احتمال کناری**

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x},\underline{+\infty})$$

$$F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{XY}}(\underline{+\infty},\boldsymbol{y})$$

$$\begin{cases} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\underline{-\infty}}^{\underline{+\infty}} f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \int_{\underline{-\infty}}^{\underline{+\infty}} f_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u}) = \Phi_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{0}) \\ \phi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{v}) = \Phi_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}) \end{cases}$$

ممان‌ها

- ممان اول $(\boldsymbol{m_X})$ (خود، یک بردار است. به بولد بودن **X** و **m** توجه شود)

$$\boldsymbol{m_X} = \mathbf{E}\{\boldsymbol{X}\} = [\mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_1, \cdots, \mathbf{E}X_n]^{\mathbf{T}}$$

- ممان دوم (ماتریس همبستگی) (**مهم**)

$$\boldsymbol{R_X} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^h\} = \mathrm{E}\begin{Bmatrix} |X_1|^2 & X_1X_2^* & \cdots & X_1X_n^* \\ X_2X_1^* & |X_2|^2 & \cdots & X_2X_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_nX_1^* & X_nX_2^* & \cdots & |X_n|^2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^h = \left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)^*$$

- ممان مرکزی دوم یا ماتریس کواریانس

$$\boldsymbol{C_X} = \mathrm{E}\{\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{X}}^h\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_X} = \boldsymbol{C_X} + \boldsymbol{m_X}\boldsymbol{m_X^h}$$

- $\boldsymbol{R_X}$ و $\boldsymbol{R_X}$ هردو تقارن هرمیتین دارند.

$$\boldsymbol{R_X} = \boldsymbol{R_X^h}; \qquad \boldsymbol{C_X} = \boldsymbol{C_X^h}$$

تعامد و ناهمبستگی

اگر اجزا بردار دو به دو **متعامد** باشند، ماتریس همبستگی یک ماتریس قطری خواهد بود که مولفه‌های قطر اصلی، توان متغیرهای تصادفی $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ می‌باشد.

$$\boldsymbol{R_X} = \mathrm{diag}(P_1, P_2, \cdots P_n)$$

اگر اجزا بردار دو به دو **ناهمبسته** باشند:

$$\boldsymbol{C_X} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2)$$

قطری بودن برای یک ماتریس ویژگی مهمی محسوب می‌گردد. چون معکوس ماتریس با معکوس نمودن مولفه‌های قطری به راحتی قابل محاسبه است.

ممان‌های متقابل

- در صورتیکه دوبردار به فرم مقابل داشته باشیم:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots X_n)^{\boldsymbol{T}}$$

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots Y_m)^T$$

داریم:

$$\boldsymbol{R_{XY}} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{XY}^h\} \qquad (n \times n)$$

$$\boldsymbol{C_{XY}} = \mathrm{E}\{\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{Y}}^h\} \qquad (n \times n)$$

$$\boldsymbol{R_{XY}} = \boldsymbol{C_{XY}} + \boldsymbol{m_X m_Y^h}$$

- **تعامد دو بردار:**

دو بردار را متعامد گوییم هرگاه هر بعد یکی با هر بعد دلخواه دیگری متعامد باشد.

$\boldsymbol{R_{XY}} = \boldsymbol{0}$ (ماتریس صفر)

- **ناهمبستگی دو بردار:**

دو بردار را ناهمبسته گوییم هرگاه هر بعد یکی با هر بعد دلخواه دیگری ناهمبسته باشد.

$\boldsymbol{C_{XY}} = \boldsymbol{0}$ (ماتریس صفر)

بردار نرمال

بردار **X** را نرمال گوییم، هرگاه هر ترکیب خطی از مولفه‌های آن یک متغیر تصادفی (RV) نرمال باشد.

$$\left.\begin{array}{c} Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \\ \forall \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \end{array}\right\} \Longrightarrow Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$$

برای اثبات، ترکیب خطی از مولفه‌های بردار تشکیل می دهیم که باید نرمال باشد:

$$\left.\begin{array}{c} X_i \sim N\left(m_{X_i}, \sigma_{X_i}^2\right) \\ Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2) \end{array}\right\} \Longrightarrow m_Z = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k; \quad \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}. \qquad (\sigma_{X_i}^2 \equiv \sigma_{X_i} \sigma_{X_i})$$

تابع چگالی احتمال برای بردار نرمال X:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}})\right) \leftrightarrow \quad \boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}})$$

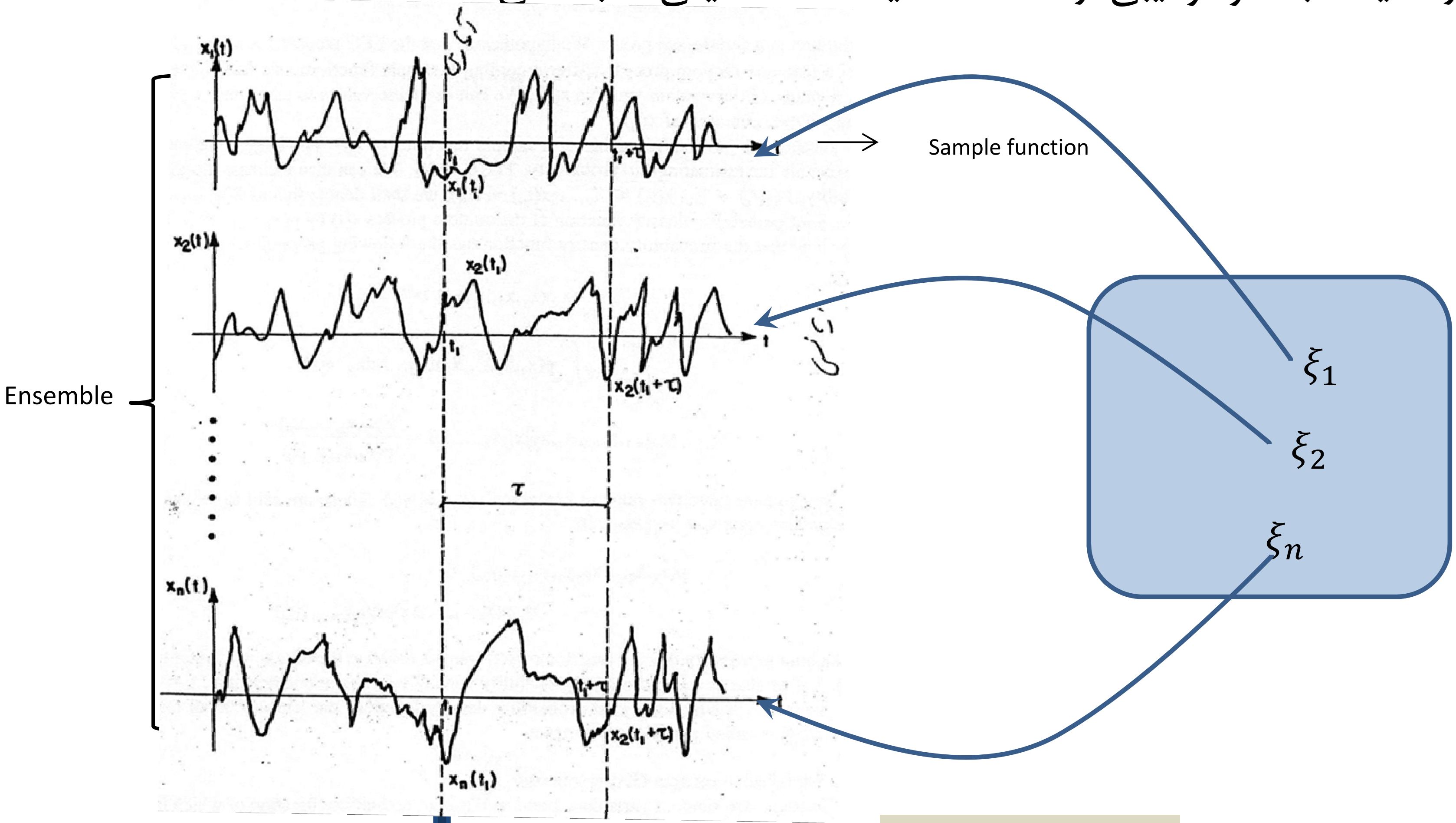
$$|\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}| \equiv \det(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}})$$

فرآیند تصادفی

- یک فرآیند تصادفی تابعی دو متغیره به صورت $X(\xi,t)$ است که متغیرهای مذکور ξ از فضای نمونه و t که معمولا زمان است.

$$\begin{cases} t \in \mathrm{T} \\ \xi \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \mathrm{T} \times \Omega \xrightarrow{X(\xi,t)} \mathbb{R}$$

در حقیقت به هر ترکیبی از $\mathrm{T} \times \Omega$ یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.



محاسبه PDF، x(ti)

$P(x(t) \le X)$

دو تجسم از متغیر تصادفی:

1. فرآیند را می‌توان مجموعه‌ای از توابع مشخص زمانی دانست که به هر نقطه از فضای نمونه یکی از آنها نسبت داده می‌شود.
2. فرآیند را می‌توان مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی دانست که به هر نقطه از فضای پارامتر یکی از آنها نسبت داده شده است. (بحث نگه داشتن زمان $X(t_i,\xi)$)

$X_i = X(t_i, \xi)$ متغیر تصادفی در لحظه‌ای iام

$X_j = X(t_j, \xi)$ متغیر تصادفی در لحظه‌ای jام

$X(t, \xi)$

$X(\xi)$

به‌اختصار به این صورت نوشته می‌شود.

مثال: تاسی که وجوهش با زمان تغییر می‌کند در یک لحظه ۱ تا ۶ را دارد و لحظه‌ی دیگر اعداد تکراری مشاهده می‌شود. بنابراین احتمال در زمان، متفاوت است.

روش‌های توصیف فرآیندهای تصادفی

- انواع توصیف:
  - توصیف تحلیلی
  - توصیف آماری
- توصیف تحلیلی:
  - اگر فرآیند را به‌صورت بالا بتوان بیان کرد دارای توصیف تحلیلی است. قابل محاسبه در یک بازه زمانی است.

$$X(t,\xi) = g(\underbrace{t, A_1, A_2, \cdots, A_n}_{\text{متغیرهای تصادفی}})$$

$$e.g.:\ \ X(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t + A_2)$$

دارای یک توصیف تحلیلی

یک فرآیند با توصیف تحلیلی، فرآیندی قابل پیشگویی (Predictable) است.

البته فرآیندها این نوع توصیف را ندارند.

- توصیف آماری:
  - توصیف فرآیند براساس توابع احتمال متغیرهای تصادفی فرآیند

۱- توصیف آماری مرتبه‌ی اول $f_{X(t)}(x) = f_X(x,t)$

توابع احتمال هریک از متغیرهای تصادفی فرآیند را داریم (ضعیف ترین توصیف فرآیندها)

۲- توصیف آماری مرتبه دوم

توابع احتمال توام هر دو متغیر تصادفی دلخواه از متغیرهای تصادفی فرآیند را داریم:

تابع احتمال توام دو RV در لحظات t و s

$$f_{X(t),X(s)}(x,y) = f_X(x,y,t,s)$$

اگر توصیف آماری مرتبه‌ی دوم را داشته باشیم توصیف مرتبه‌ی اول را هم داریم.

۳- توصیف آماری مرتبه‌ی nام:

توابع احتمال هر بردار تصادفی n بعدی فرآیند را داریم:

$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(\boldsymbol{x}) = f_X(\boldsymbol{x},t_1,t_2,\cdots,t_n) = f_X(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$$

اگر $n \to \infty$ توصیف یک توصیف آماری کامل فرآیند خواهد بود که در عمل ممکن نیست.

** توجه اگر در توصیف مرتبه‌ی دوم نسبت به y انتگرال بگیریم تبعیت تابع نسبت به s نیز از بین می‌رود:

$$f_X(x;t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,y;t,s)\mathrm{d}y$$

ممان‌های فرآیندهای تصادفی

تابع متوسط $$m_X(t) = \mathrm{E}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;t)\mathrm{d}x$$

تابع همبستگی فرآیند (ممان دوم) $$R_X(t,s) = \mathrm{E}\{X(t)X(s)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y;t,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

تابع کواریانس فرآیند (ممان مرکزی) $$C_X(t,s) = \mathrm{E}\{\tilde{X}(t),\tilde{X}(s)\} = \mathrm{E}\{X(t) - m_X(t)\}\mathrm{E}\{X(s) - m_X(s)\}$$

$$C_X(t,s) = R_X(t,s) - m_X(t)\, m_X(s)$$

فرآیند مختلط:

$$R_X(t,s) = \mathrm{E}\{X(t)X^*(s)\}$$
$$C_X(t,s) = \mathrm{E}\{\tilde{X}(t),\tilde{X}^*(s)\} = R_X(t,s) - m_X(t)\, m_X^*(s)$$

قدرت فرآیند تصادفی در لحظه‌ی t ⟵ $$R_X(t,t) = \mathrm{E}\{X(t)X^*(t)\} = \mathrm{E}|X(t)|^2 = P_X(t)$$

واریانس فرآیند تصادفی در لحظه‌ی t ⟵ $$C_X(t,t) = \mathrm{E}\{\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(t)\} = \mathrm{E}\left|\tilde{X}(t)\right|^2 = \sigma_X^2\,(t)$$

ممان‌های متقابل:

تابع همبستگی متقابل $$R_{XY}(t,t') = \mathrm{E}\{X(t)Y^*(t')\}$$

تابع کواریانس متقابل $$C_X(t,t') = \mathrm{E}\{\tilde{X}(t),\tilde{Y}^*(t')\} = R_{XY}(t,t') - m_X(t)\,m_Y^*(t')$$

دو فرآیند متعامد:

دو فرآیند را متعامد گوییم هرگاه هر متغیر تصادفی از یکی از فرآیندها با هر متغیر تصادفی دلخواه از فرآیند دیگر متعامد باشد.

تابع همبستگی متقابل صفر باشد.

شرط $R_{XY}(t,t') = 0$

نماد $X \perp Y$

دو فرآیند ناهمبسته:

دو فرآیند را ناهمبسته گوییم هرگاه هر متغیر تصادفی از یکی از فرآیندها با هر متغیر تصادفی دلخواه از فرآیند دیگر ناهمبسته باشد.

شرط $C_{XY}(t,t') = 0$

نماد $X \perp\!\!\!\!\smile Y$

توابعی از یک سری متغیر $X(.) \perp\!\!\!\!\smile Y(.)$

دو فرآیند مستقل:

دو فرآیند را مستقل گوییم هرگاه هر بردار تصادفی از یکی از فرآیندها با هر بردار تصادفی دلخواه از فرآیند دیگر مستقل باشند.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}};$ $\qquad x_i = x(t_i)$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}};$ $\qquad y_i = y(t_i)$

$$\begin{cases} f_{XY}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_X(\boldsymbol{x}) f_Y(\boldsymbol{y}) & \text{شرط} \\ X \perp\!\!\!\perp Y & \text{نماد} \end{cases}$$

مثال:

فرض کنید $X(t)$ به صورت مقابل بیان می‌شود. در رابطه این متغیر بجز θ بقیه‌ی متغیرها یقینی هستند.

$$X(t) = \mathrm{a}\cos(\omega_0 t + \theta)$$
$$\theta \sim u(0,2\pi)$$

میانگین و تابع همبستگی فرآیند را برای بررسی نوع سیگنال محاسبه کنید.

پس از حل روابط داریم:

$$m_X(t) = \mathrm{E}\{X(t)\} = 0$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{\mathrm{a}^2}{2}\cos\omega_0(t_1 - t_2)$$

$\therefore$ **WSS** است.

سوال: حال بافرض $\theta \sim u(0,2\pi)$ و $a \sim u(0,2\pi)$ را مجددا حل کنید.

فرآیند ایستا (ساکن)

تعریف: فرآیندی ایستا است که خصوصیات آماری آن با گذشت زمان تغییر نکند.

در این میان دو نوع ایستایی تعریف می‌گردد:

۱– فرآیند ایستا به مفهوم اکید یا اکیدا ایستا ((Strict Sense Stationary (SSS)):

توابع احتمال فرآید با گذشت زمان تغییر نکند.

۲- **فرآیند ایستا به مفهوم وسیع ((Wide Sense Stationar (WSS)):**

اگر ممانهای اول و دوم فرآیند با گذشت زمان تغییر نکند.

$$m_X(t) = m_X$$

$$R_X(t+\tau, t) = \mathrm{E}\{X(t+\tau)X^*(t)\} = R_X(\tau)$$

همانطورکه مشاهده می‌گردد فقط به τ بستگی دارد.

SSS بودن در مراتب مختلفی مطرح می‌گردد:

مرتبه اول: توابع احتمال یک بعدی با گذر زمان تغییر نمی‌کنند.

$$f_X(x;t) = f_X(x)$$

مرتبه دوم: توابع احتمال دو بعدی با گذر زمان تغییر نمی‌کنند.

$$f_X(x,y;t+\tau,t) = f_X(x,y;\tau)$$

و ... مرتبه‌ی nام: توابع احتمال دو بعدی با گذر زمان تغییر نمی‌کنند.

$$f_X(\boldsymbol{x};t,t+\tau_1,t+\tau_2,\cdots,t+\tau_{n-1}) = f_X(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\tau})$$

در صورتیکه $n \to \infty$، SSS مرتبه‌ی ∞ است که SSS کامل گوییم.

- از SSS مرتبه‌های بالاتر به کمک توابع احتمال کناری می‌توان SSS بودن مرتبه‌های پایین‌تر را نتیجه گرفت.

- اگر فرآیندی را SSS نامیدیم به معنای SSS کامل بودن فرآیند مذکور است.

- اگر فرآیندی را ایستا (ساکن) نامیدیم به معنای WSS بودن فرآیند مذکور است.

توأما WSS بودن فرآیند:

- اولا تک تک باید WSS باشند
- ثانیا تابع همبستگی متقابل به زمان بستگی نداشته باشد.

$$R_{XY}(t+\tau,t)=R_{XY}(\tau)$$

توأما SSS بودن فرآیند:

- توابع توام احتمال با گذر زمان تغییر نکند:

$$f_X(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t,t+\tau_1,t+\tau_2,\cdots,t+\tau_{n-1},t+\tau'_1,t+\tau'_2,\cdots,t+\tau'_{m-1})=f_{XY}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\tau})$$

از SSS بودن توام می‌توان به SSS بودن تک تک اعضا رسید.
اگر m و n به سمت بینهایت میل کنند دو فرآیند توأما SSS کامل هستند.

مثال:

فرض کنید فرآیند X، یک فرآیند SSS کامل است و $Y(t) = X(2t)$، در مورد تابع y(t) بحث کنید. (حل)

قضیه: از SSS بودن مرتبه‌ی دوم می‌توان WSS را نتیجه گرفت. (حل)

معرفی چند فرآیند تصادفی

- **فرآیند نرمال:**

فرآیندی را نرمال گوییم هرگاه هر ترکیب خطی دلخواه از متغیرهای تصادفی آن یک متغیر تصادفی نرمال تولید نماید.

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha) X(\alpha) \mathrm{d}\alpha \quad \Longrightarrow Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$$
$$\forall\, g(.)$$

قضیه: هر ترکیب خطی متغیر بازمان از فرآیند نرمال خود یک فرآیند نرمال است.

$$\left.\begin{array}{c} Z = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t;\alpha) X(\alpha) \mathrm{d}\alpha \\ \forall\, h(.,.) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Z(t) یک فرآیند نرمال است

(اثبات)

– در فرآیند نرمال، ممان‌های اول و دوم یک توصیف آماری کامل است. $X(.) \sim N(m_X(t), C_X(t,s))$

– از WSS بودن فرآیند نرمال می‌توان SSS کامل بودن آنرا نتیجه گرفت.

WSS بودن $\Longrightarrow$ SSS کامل بودن

فقط فرآیند نرمال

فرآیند نویز سفید

$$\begin{cases} m_X(t) = 0 \\ R_X(t+\tau, t) = C_X(t+\tau, t) = g(t)\delta(\tau) \end{cases}$$

فقط وقتی مقدار دارد که $\tau = 0$ باشد. یعنی در زمان‌هایی که $t_1 \neq t_2$ باشد.

❋ تعامد متغیرهای تصادفی لحظات مختلف نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} X(t_1) \perp X(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

❋ ناهمبسته بودن متغیرهای تصادفی لحظات مختلف نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} X(t_1) \underset{\sim}{\perp} X(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

توزیع توان در فرکانس‌های مختلف (حوزه‌ی فرکانس) یکسان است. (مفهوم سفید بودن)

این فرآیند در حالت کلی ایستا نیست، مگر اینکه $g(t) = N_0$ باشد (نویز سفید ایستا)

اگر $g(t) = N_0 = 1$ باشد، فرآیند نویز سفید نرمالیزه است.

$$\begin{cases} m_X(t) = 0 \\ R_X(t+\tau, t) = N_0\delta(\tau) \end{cases}$$

❋ **فرآیند نویز سفید نرمال:** که کلیه‌ی متغیرهای آن از هم مستقلند. چون نرمال است بنابراین از ناهمبستگی می‌توان استقلال را نتیجه گرفت.

$$X(.) \sim N(0, g(t)\delta(t-s))$$

فرآیند وینر (wiener)

فرآیند وینر انتگرال از فرآیند نویز سفید نرمال ایستا است.

$$X(t) = \int_0^t W(\alpha)\mathrm{d}\alpha; \quad t = [0, \infty]$$

$\mathrm{W}(.)\sim N(0, N_0\delta(t-s))$ نویز سفید نرمال

فرآیند وینر نرمال است. هر ترکیب خطی متغیر با زمان از فرآیند های نرمال خود نرمال است.

$$X(t) = \int_0^t W(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t;\alpha)W(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$h(t;\alpha) = \begin{cases} 1 & 0 < \alpha < t \\ 0 & o.w. \end{cases} = \mathrm{rect}(\frac{\alpha - t/2}{t})$$

تمام خواص فرآیند نرمال را دارد.

$$X(.)\sim N(m_X(t), C_X(t,s))$$

تمرین: $m_X(t)$ و $C_X(t,s)$ را برای فرآیند وینر به‌دست آورید.