Sahand University of Technology

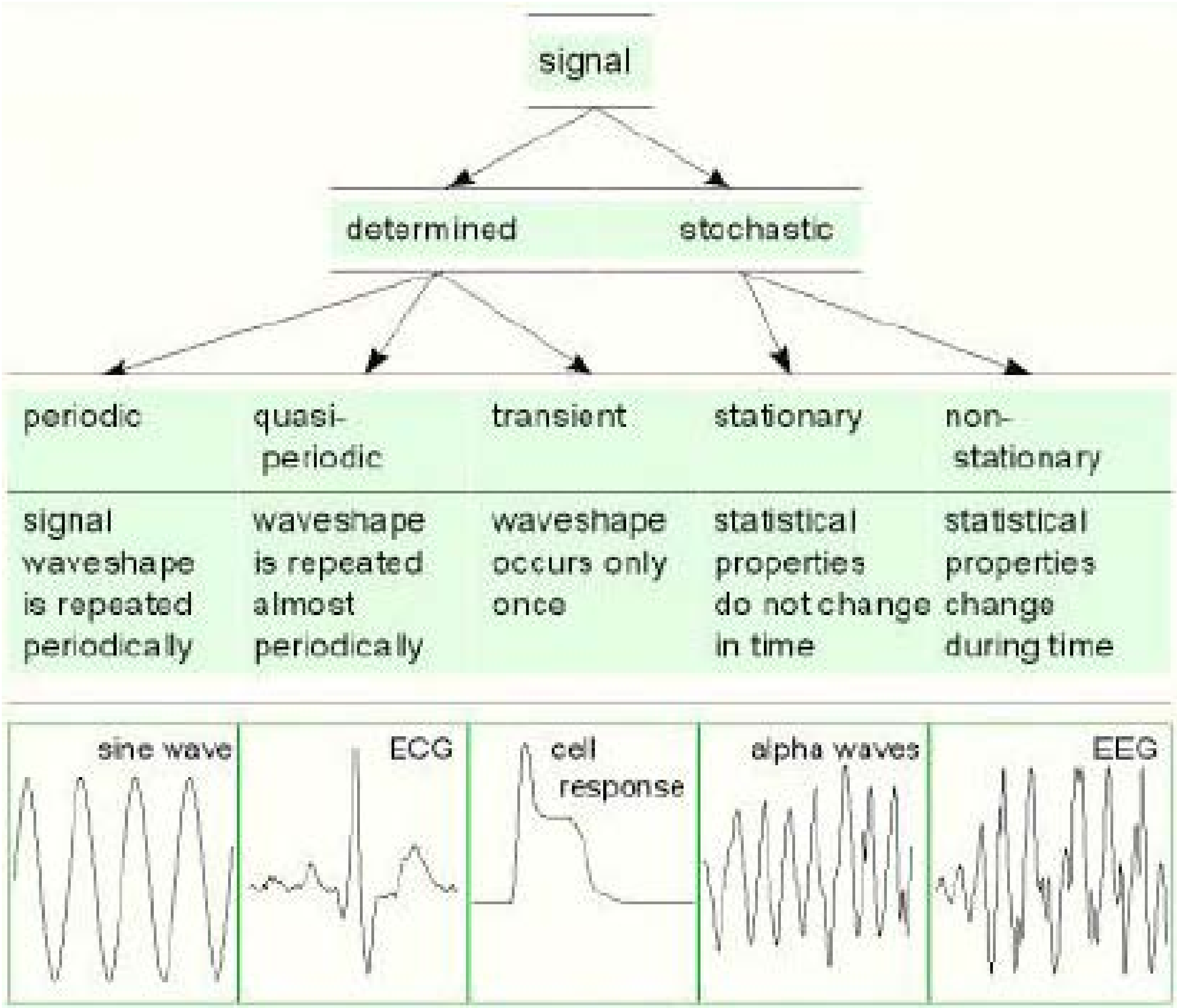
Lecture 4-1
Random Processes(Part 1)
فرآیندهای تصادفی(بخش اول)
مفاهیم اولیه

Dr. Shamekhi
Summer 2016

- انواع سیگنال:
  - یقینی: سیگنال‌هایی که مقدار آنها در آینده به شرطی که اطلاعات مناسبی از گذشته‌ی آنها در اختیار باشد با دقت و اطمینان کامل قابل تعیین است.
  - تصادفی: سیگنال‌هایی هستند که حتی با وجود داشتن اطلاعات کامل از گذشته‌ی سیگنال پیشبینی آینده آنها امکان پذیر نیست.
  - سیگنال‌های آشوبناک: سیگنال‌های یقینی هستند که پیشبینی آینده‌ی آنها امکان‌پذیر نیست. این شرایط به‌دلیل حساسیت این سیگنال‌ها به شرایط اولیه (و یا گذشته) آنها ایجاد می‌گردد.
  - سیگنال‌های فرکتال: در این سیگنال‌ها در سطوح بزرگنمایی شده از سیگنال تشابه وجود دارد.

تست تصادفی بودن سیگنال:

N نمونه ازسیگنال درنظر گرفته می شود؛اگر تعداد نقاطی که مشتق اول سیگنال در آن تغییر علامت می دهد **(Turning Point)** بیشتراز **2(N-2)/3** باشد،تصادفی در نظرگرفته می شود.


signal
determined
stochastic
periodic
quasi-periodic
transient
stationary
non-stationary
signal waveshape is repeated periodically
waveshape is repeated almost periodically
waveshape occurs only once
statistical properties do not change in time
statistical properties change during time
sine wave
ECG
cell response
alpha waves
EEG

فرآیندهای تصادفی

- سیگنال‌هایی که در حوزه مهندسی پزشکی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند عموما تصادفی هستند. (یا ذاتا تصادفی است یا به دلیل جمع و یا ضرب نویز تصادفی می‌گردد.)
  - به عنوان مثال HRV کاملا تصادفی است اما اگر منظور از سیگنال، الگوی سیگنال ECG جای بحث بیشتر دارد. در حقیقت با توجه به نوع سیگنال و کاربرد آن بحث انجام می‌شود.
  - فرض اصلی در این درس تصادفی بودن سیگنال‌های مورد برری است.
- **آزمایش تصادفی**

آزمایشی که به نتایجی از پیش نامعلوم منجر شود آزمایش تصادفی است.

این آزمایش‌ها با نسبت برابر قابل تکرار هستند.

نتیجه‌ی انجام هر آزمایش تصادفی، یک رخداد معلوم ξ_i است که به‌وقوع می‌پیوندد. مجموعه‌ی کلیه این رخدادهایی که احتمال وقوع آنها وجود دارد فضای نمونه را تشکیل می‌دهند و به مجموعه‌ای از آزمایش‌های تصادفی انجام شده پیشامد گفته می‌شود.

فضای نمونه: $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$

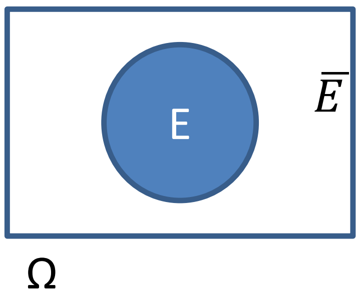
پیشامد: E={زیر مجموعه ای از فضای نمونه}

مثال: ریختن تاس $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

پیشامد زوج بودن: E={2,4,6}

پیشامد و احتمال

- E یک پیشامد است و $\overline{E}$ مکمل این پیشامد.
- رخ دادن یک پیشاند به معنای وقوع یکی از اعضای E است.



- نمودار ون مربوط به فضای نمونه

- فضای نمونه
  - گسسته: قابل شمارش باشد. (تاس)
  - پیوسته: قابل شمارش نباشد. (انتخاب اعداد حقیقی در بازه‌ای مشخص)

پیشامد قطعی: نتیجه آزمایش قطعا در Ω است.

پیشامد ϕ: پیشامد غیرممکن

دو پیشامد جدا از هم: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ -پیشامد زوج بودن و فرد بودن

مکمل پیشامد $\overline{E} \equiv$ $\quad E \cup \overline{E} = \Omega \quad E \cap \overline{E} = \emptyset$

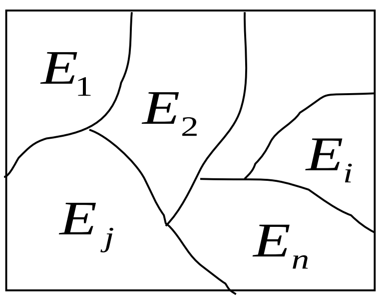
برای راحتی در نگارش : $E_1 \cap E_2 = E_1 E_2$

$E_1 \cup E_2 = E_1 + E_2$

پیشامدهای روی هم فرسا: در آزمایش یکی از E_iها اتفاق می افتد.

$$\bigcup_i E_i = \sum_{i=1}^{n} E_i = \Omega$$

اگر پیشامدهای E_1، E_2، ... و E_n، جدا از هم و روی هم فرسا باشند، پیشامدها فضای نمونه را افراز (Partition) کرده‌اند:



احتمال: تابعی است مانند P که به هر پیشامد یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد به‌طوریکه:

$$P\{E\} \geq 0$$
$$P\{\Omega\} = 1$$

$$\begin{cases} E_i E_j = 0 \\ i \neq j \end{cases} \Longrightarrow \; P\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} E_i\} = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} P\{E_i\}\}$$

در صورتی‌که آزمایشی را N بار انجام دهیم و از این تعداد n_i بار یک رخداد به وقوع بپیوندد فرکانس نسبی (Relative frequency) به صورت مقابل محاسبه می‌گردد:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

در صورتیکه تعداد آزمایش‌ها به بینهایت میل نماید داریم احتمال وقوع پیشامد مذکور به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(Ai) = lim_{N\to\infty} fi = lim_{N\to\infty}(\frac{n_i}{N})$$

حال اگر توزیع احتمال را یکنواخت فرض کنیم، احتمال پیشامد زوج بودن برابر است با:

$$P\{even\} = \frac{even\ numbers}{Total\ numbers} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P\{E\} + P\{\bar{E}\} = 1$$

$$P\{E\} \leq 1$$

$$P\{\emptyset\} = 0$$

$$P\{E_1 + E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1E_2\}$$

احتمال شرطی:

$$P\{E|A\} = \frac{P\{EA\}}{P\{A\}}; P\{EA\} = P\{A\}.P\{E|A\} = P\{A|E\}.P\{E\}$$

$(for\ P\{A\} \neq 0)$

رابطه‌ی زنجیره‌ای:

$$P\{E_1E_2\} = P\{E_1\}P\{E_2|E_1\} = P\{E_2\}P\{E_1|E_2\}$$

$$P\{E_1E_2 \cdots E_n\} = P\{E_1\}P\{E_2|E_1\}P\{E_3|E_1E_2\} \cdots P\{E_n|E_1E_2 \cdots E_{n-1}\}$$

استقلال پیشامدها:

اگر رخ دادن پیشامد E_2 هیچ تاثیری روی E_1 نداشته باشد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$E_1 \perp\!\!\!\perp E_2$

در صورتیکه دو پیشامد مستقل باشند:

$$P\{E_1|E_2\} = P\{E_1\}$$

$$P\{E_1E_2\} = P\{E_1\}P\{E_2\}$$

توجه: دو پیشامد جدا از هم به‌هیچ‌وجه مستقل نیستند و داریم:

$$P\{E_1 + E_2\} = P\{E_1\}+P\{E_2\}$$

و

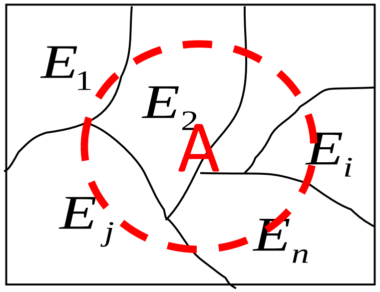
$$P\{E_1E_2\} = 0$$

پیشامدهای E_1، E_2، ... و E_n را تواما مستقل گوییم هرگاه ترکیب (n-1) تایی آنها تواما مستقل باشند:

$$P\{E_1E_2 \cdots E_n\} = P\{E_1\}P\{E_2\} \cdots P\{E_n\}$$

$$E_1 \perp\!\!\!\perp E_2 \quad E_1 \perp\!\!\!\perp E_3 \cdots \cdots$$

احتمال شرطی و قضیه بیز



A پیشامدی است که وقوعش در پیشامدهای فضای نمونه اشتراک دارد.

احتمال وقوع A:

$$P\{A\}=\sum_{i=1}^{n}P\{E_i\}\,P\{A|E_i\}$$

رابطه‌ی زنجیره‌ای

$$P\{A\}=P\{A\Omega\}=P\left\{A\sum_{i=1}^{n}E_i\right\}=P\left\{\sum_{i=1}^{n}AE_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}P\{AE_i\}=\sum_{i=1}^{n}P\{E_i\}\,P\{A|E_i\}$$

رابطه‌ی بیز (Bayes):

$$P\{E_j|A\}=\frac{P\{E_j\}P\{A|E_j\}}{\sum_{i=1}^{n}P\{E_i\}\,P\{A|E_i\}}$$

Prior Prob.
(احتمال پیشین)

Likelihood
(درست‌نمایی)

Posterior Prob.
(احتمال پسین)

$$P\{A|B\}=\frac{P\{A\}P\{B|A\}}{P\{B\}}$$

Evidence
(گواه)

مثال:

در بین ۱۰۰۰ نفر متهم یک نفر مجرم وجود دارد. می خواهیم به کمک دستگاه دروغ سنج که احتمال خطای ۱۰ درصد دارد مجرم را پیدا کنیم. احتمال اینکه فردی که توسط دستگاه دروغ‌سنج، دروغ‌گو تشخیص داده شده بی‌گناه باشد چقدر است؟

E پیشامد مجرم بودن فرد
$\bar{E}$ پیشامد بیگناه بودن فرد

$$P(E)=\frac{1}{1000};\quad P(\bar{E})=\frac{999}{1000};$$

A پیشامد دروغ گو تشخیص دادن
$\bar{A}$ پیشامد راستگو تشخیص دادن

$$P(\bar{E}/A)=?$$

$$P(A|\bar{E})=P(\bar{A}|E)=\frac{1}{10};\qquad P(A|E)=P(\bar{A}|\bar{E})=\frac{9}{10}$$

$$P(\bar{E}/A)=\frac{P(\bar{E}).P(A/\bar{E})}{P(A)}=\frac{P(\bar{E}).P(A/\bar{E})}{P(E).P(A/E)+P(\bar{E}).P(A/\bar{E})}=0.991$$

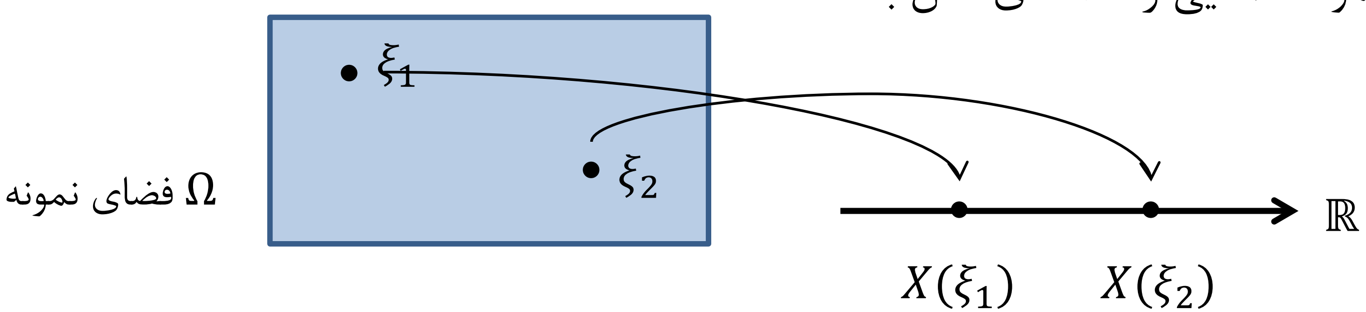
متغیرهای تصادفی: Random variables

متغیرهای تصادفی

تابعی است یقینی مانند X که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی را نسبت می دهد.

خروجی این تابع می‌تواند عدد گینی باشد در یک مسابقه شانس و یا ولتاژ یک منبع تصادفی و یا هزینه‌ی یک جز تصادفی.

یا به عنوان مثال دیگر تعریف تابع $X(f_i) = 5i$ برای آزمون تاس است. به صورتیکه f_i خروجی **i**ام از مجموعه ۶ تایی رخدادهای تاس باشد.



$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

توجه: متغیرهای تصادفی در قالب حروف پررنگ (Boldface) نوشته می‌شوند. با این‌حال جهت نمایش بهتر در این مجموعه اسلاید از حروف بزرگ ایتالیک استفاده شده است.

تابع توزیع احتمال:

احتمال اینکه متغیر تصادفی مقدار کوچکتر یا مساوی یک مقدار ثابت را اخذ کند.

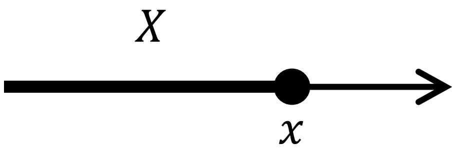
PDF: Probability Distribution Function

CDF: Cumulative Distribution Function

PDF ≡ CDF

احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقدار کوچکتر یا مساوی x مقدار ثابت را اخذ کند.

$$F_X(x) = P\{\xi : X(\xi) \leq x\} = P\{X \leq x\}$$



$$P(X \geq \infty) = P(X \leq -\infty) = 0$$

$$P(X \leq \infty) = 1$$

تابع توزیع احتمال (PDF)

خواص PDF:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $\begin{cases} F_X(-\infty) = 0 \\ F_X(+\infty) = 1 \end{cases}$

3) $x_2 \geq x_1 \;\Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$

4) $F_X(x^+) = F_X(x)$

5) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

6) $P\{X = x_0\} = F_X(x_0^+) - F_X(x_0^-) = \begin{cases} 0 \\ P_0 \end{cases}$

اگر CDF در x_0 جهش نداشته باشد.

اگر CDF در x_0 به اندازه P_0 جهش داشته باشد.

یک سکه دو بار انداخته می‌شود. متغیر تصادفی X تعداد دفعات شیر در نتایج است.

$F_X(x)$ را محاسبه نمایید.

$$\Omega = \{ HH, HT, TH, TT \},$$

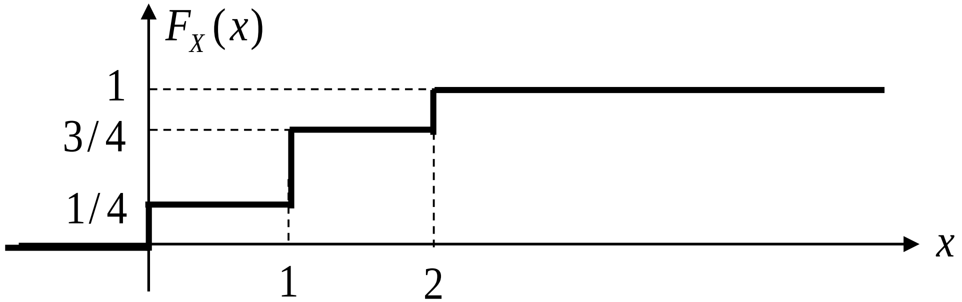
$$X(HH) = 2, X(HT) = 1, X(TH) = 1, X(TT) = 0.$$

$$x < 0, \quad \{X(\xi) \le x\} = \phi \Rightarrow F_X(x) = 0,$$

$$0 \le x < 1, \{X(\xi) \le x\} = \{ TT \} \Rightarrow F_X(x) = P\{ TT \} = P(T)P(T) = \frac{1}{4},$$

$$1 \le x < 2, \{X(\xi) \le x\} = \{ TT, HT, TH \} \Rightarrow F_X(x) = P\{ TT, HT, TH \} = \frac{3}{4},$$

$$x \ge 2, \quad \{X(\xi) \le x\} = \Omega \Rightarrow F_X(x) = 1.$$



تابع چگالی احتمال (Pdf)

تابع چگالی احتمال ← **Pdf:** probability density function

مشتق تابع توزیع احتمال تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X است.

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

خواص Pdf را مشابه PDF می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

1) $P(X \le x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$

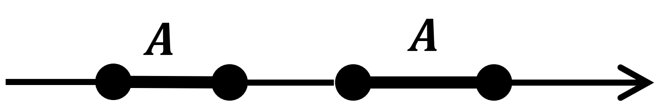
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

3) $f_X(x) \ge 0$

4) $P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$

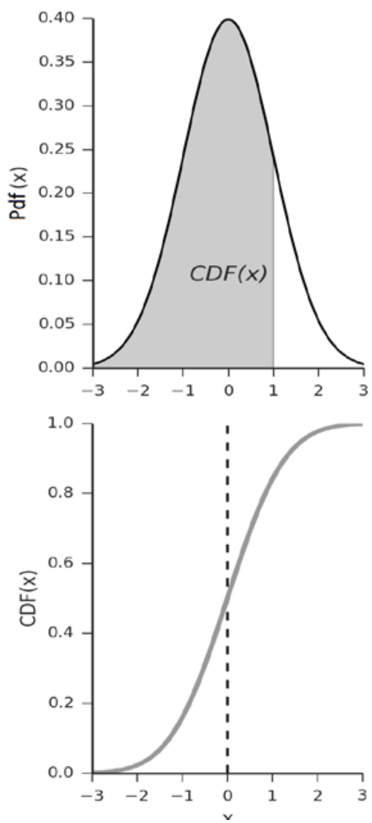
5) $P\{X = x_0\} = \int_{x_0^-}^{x_0^+} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 \\ P_0 \end{cases}$

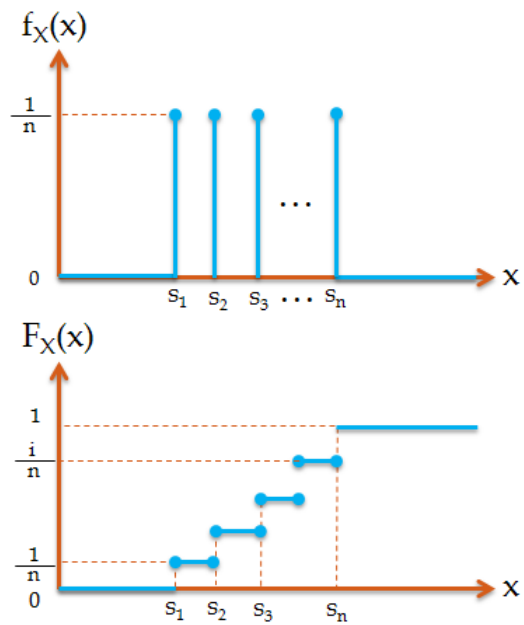
6) $P\{X \in A\} = \int_A f_X(x)dx \Leftrightarrow$

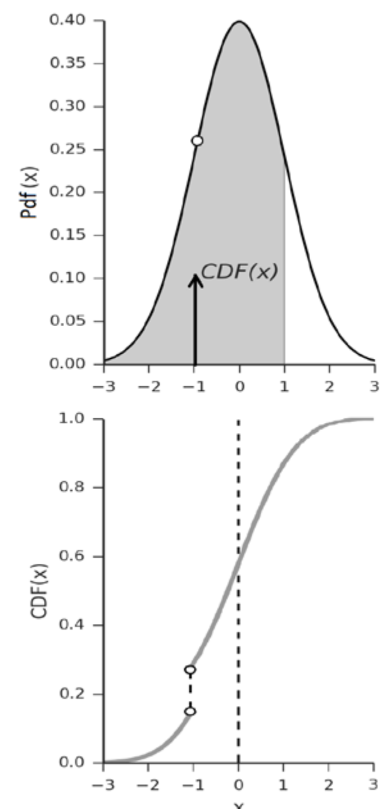


انواع متغیرهای تصادفی

- پیوسته: تغییرات تابع CDF یا PDF به صورت پیوسته است.
- گسسته: ″ ″ ″ ″ ″ پله‌ای است. (تعدادی تابع ضربه)
- ترکیبی: ″ ″ ″ ″ ″ ترکیبی از توابع پیوسته و گسسته است.







تابع جرم احتمال

تابع جرم احتمال:

Pmf: probability mass function

(برای متغیرهای گسسته)

$$P_X(x) \triangleq P\{X = x\}$$

$$f_X(x) = \sum_i P(x_i)\delta(x - x_i),$$

$$F_X(x) = \sum_i P(x_i)u(x - x_i),$$

برای مثال موجود در اسلاید قبل:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/n & x = S1 \\ 1/n & x = S2 \\ 1/n & x = S3 \end{cases}$$

قضیه‌ی احتمال کلی:

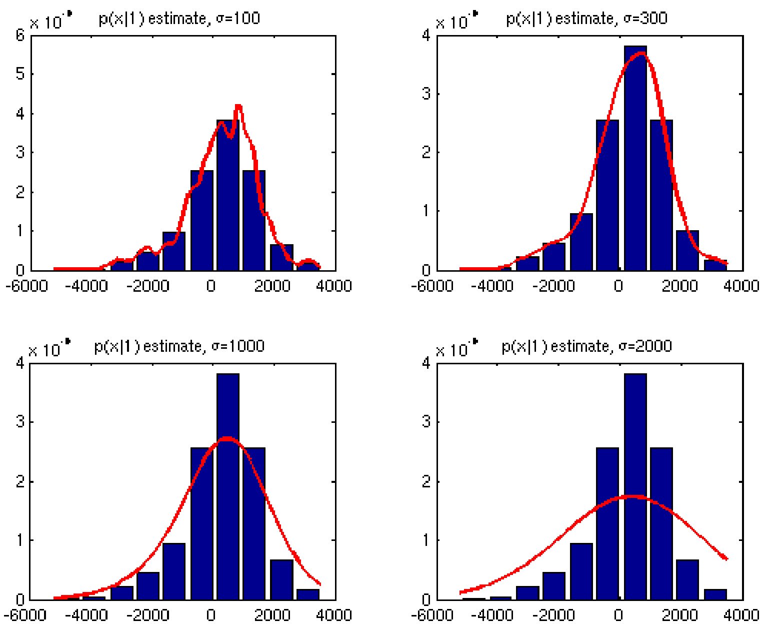
$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P\{E_i\} F_X\{x|E_i\}$$

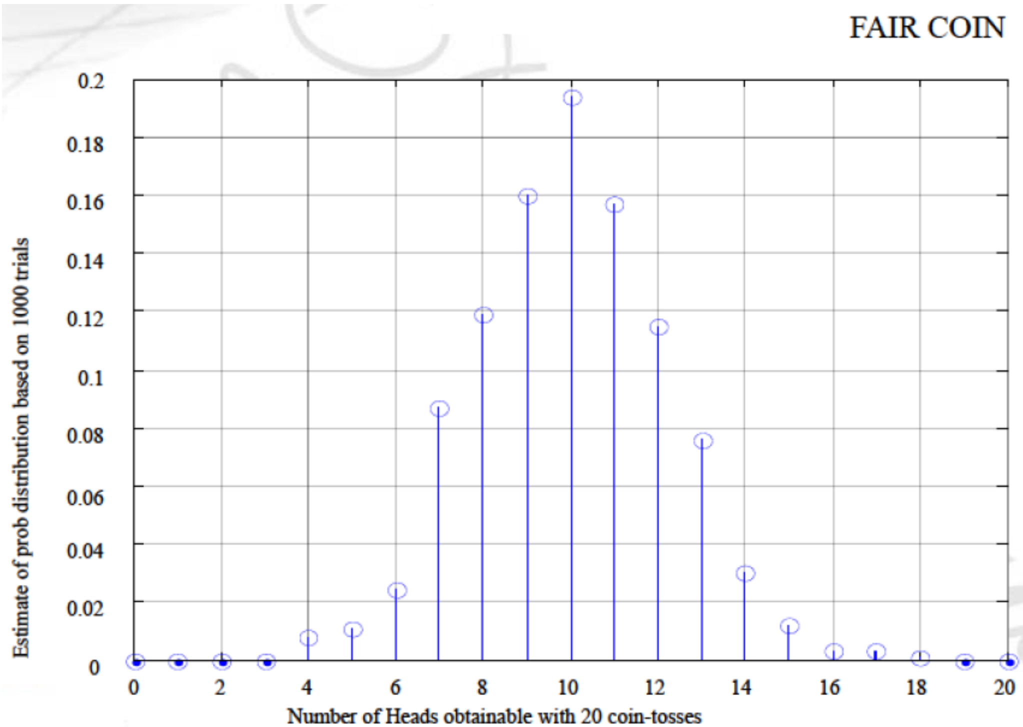
$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P\{E_i\} f_X\{x|E_i\}$$

هیستوگرام (Histogram)

هیستوگرام تخمینی از تابع چگالی احتمال است.

$$p_X(x) \approx \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \propto Pr(x \leqslant X \leqslant x+\Delta x)$$





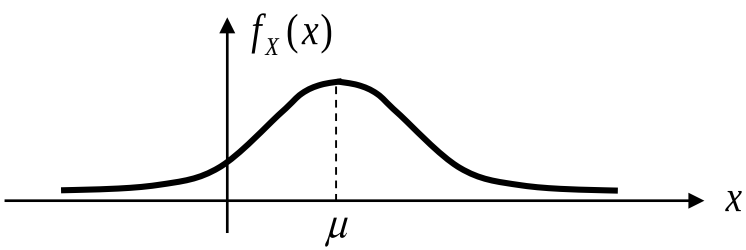
1. Normal (Gaussian):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}. \tag{3-29}$$

این نمودار دارای شکلی زنگوله ای است و تابع توزیع آن به‌کمک میانگین μ و
وارایانس σ تعریف می‌گردد. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

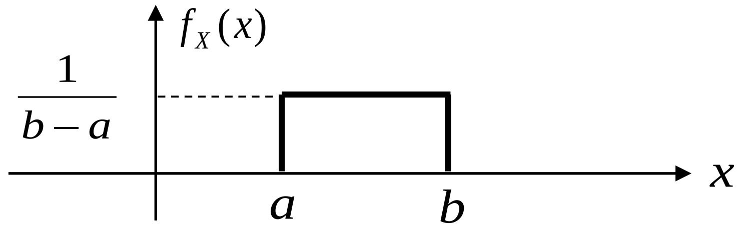
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \tag{3-30}$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$



2. Uniform: $X \sim U(a,b),\ a<b,$

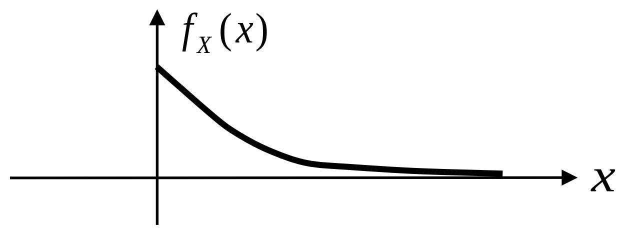
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



3. Exponential: $X \sim \varepsilon(\lambda)$ if

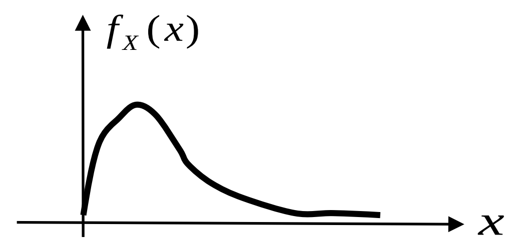
if

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}, & x\ge 0,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



4. Gamma: $X \sim G(\alpha,\beta) \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}e^{-x/\beta}, & x\ge 0,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

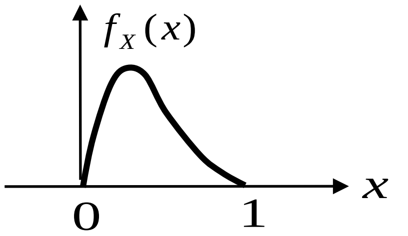


$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

n = integer

5. Beta: $X \sim \beta(a,b)$ if $(a>0,\ b>0)$

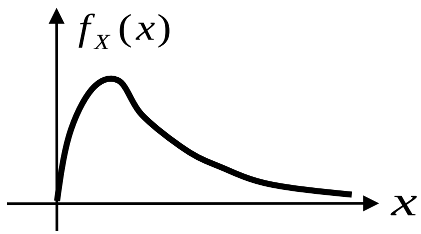
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$\beta(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du.$$

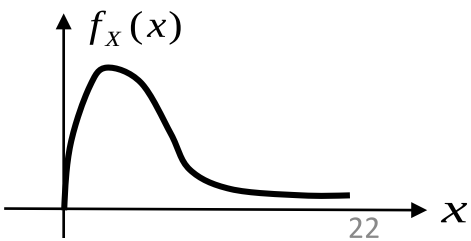
6. Chi-Square: $X \sim \chi^2(n)$, if

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1}e^{-x/2}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



7. Rayleigh: $X \sim R(\sigma^2)$, if

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

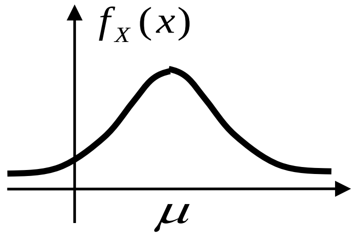


8. Nakagami – *m* distribution:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\Gamma(m)}\left(\dfrac{m}{\Omega}\right)^m x^{2m-1} e^{-mx^2/\Omega}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

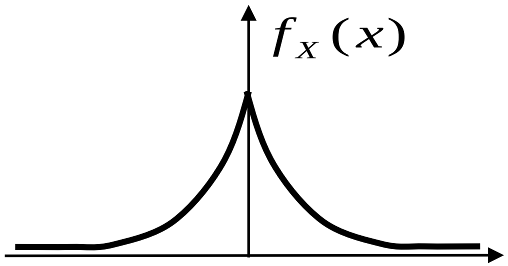
9. Cauchy: $X \sim C(\alpha, \mu)$, if

$$f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + (x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$



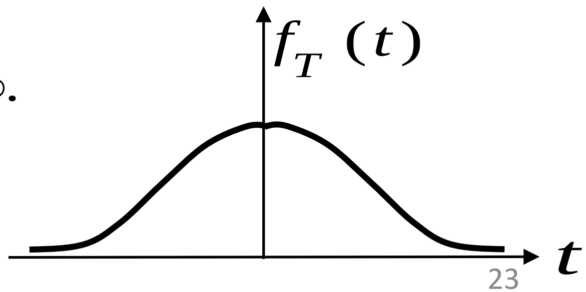
10. Laplace:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda}, \quad -\infty < x < +\infty.$$



11. Student's *t*-distribution with n degrees of freedom

$$f_T(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < t < +\infty.$$



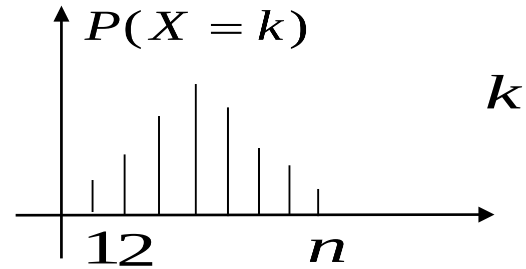
متغیرهای تصادفی گسسته

1. Bernoulli: X takes the values (0,1), and

$$P(X=0)=q, \quad P(X=1)=p.$$

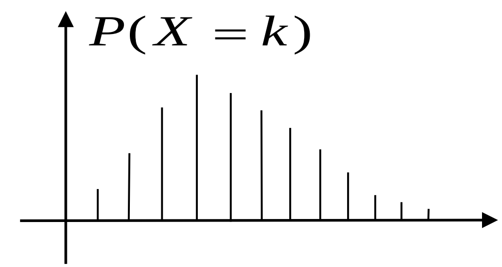
2. Binomial: $X \sim B(n,p),$ if

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n.$$



3. Poisson: $X \sim P(\lambda)$, if

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\infty.$$



4. Hypergeometric:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad \max(0,m+n-N)\le k\le \min(m,n)$$

5. Geometric: $X \sim g(p)$ if

$$P(X=k)=pq^k, \quad k=0,1,2,\cdots,\infty, \qquad q=1-p.$$

6. Negative Binomial: $X \sim NB(r,p)$, if

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}, \qquad k=r, r+1, \cdots.$$

7. Discrete-Uniform:

$$P(X=k)=\frac{1}{N}, \quad k=1,2,\cdots,N.$$

25

تابع متغیر تصادفی

X متغیر تصادفی $Y = g(X)$ خود یک متغیر تصادفی است.

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\Omega \xrightarrow{\quad Y \quad} \mathbb{R}$$

$$P\{Y \epsilon B\} = P\{X \epsilon A\} = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

روش کلی تعیین تابع چگالی احتمال Y:

کافی است پیشامد متناظر Y در X را محاسبه کنیم.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$X \le x$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dx} F_Y(y)$$

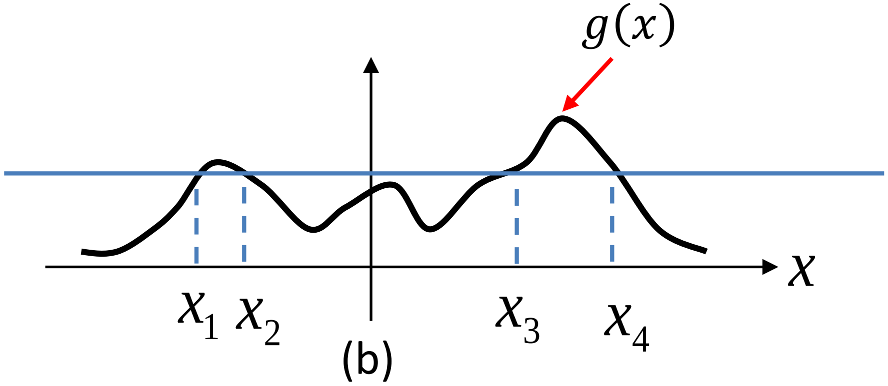
حالتی خاص

در حالتی خاص برای تعیین $f_Y(y)$ می توان از رابطه‌ی زیر استفاده نمود:

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

این حالت خاص زمانی محقق می‌گردد که $g(x) = y$ به تعداد قابل شمارش $x = x_1$، $x = x_2$، و … جواب داشته باشد و

تابع $g(x)$ در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد.



مثال:

تابع چگالی متغیر تصادفی x بصورت زیر تعریف شده است. تابع چگالی احتمال $Y = g(X) = X^3$ را بدست آورید.

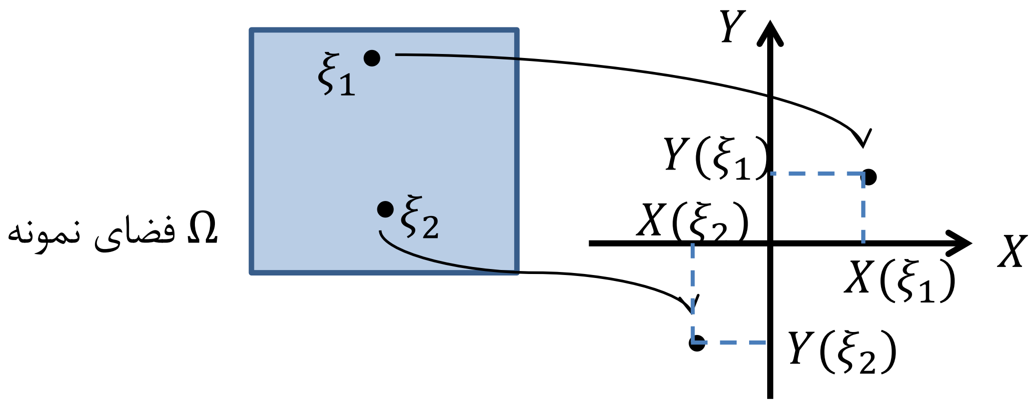
$$f_x(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\boxed{F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P\left(X \le y^{\frac{1}{3}}\right) = \int_0^{y^{1/3}} 6x(1-x)dx}$$

$$\boxed{f_y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 2\left(y^{\frac{-1}{3}} - 1\right);\ \ 0 < y < 1}$$

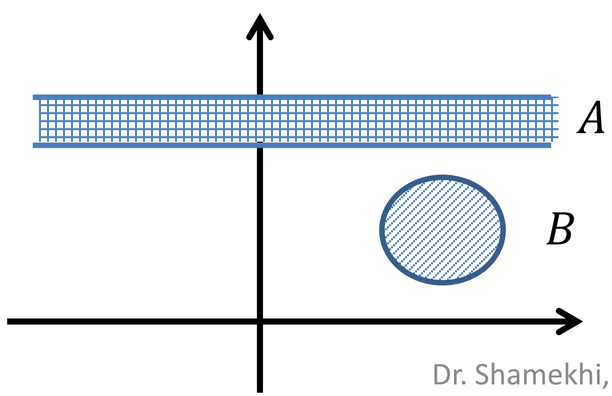
به‌ازای یک فضای نمونه دو نقطه برروی $\mathbb{R}$ داریم.

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$
$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$
$$\Omega \xrightarrow{XY} \mathbb{R}^2$$



توابع احتمال توام X و Y: $F_{XY}(x,y)$, $f_{XY}(x,y)$

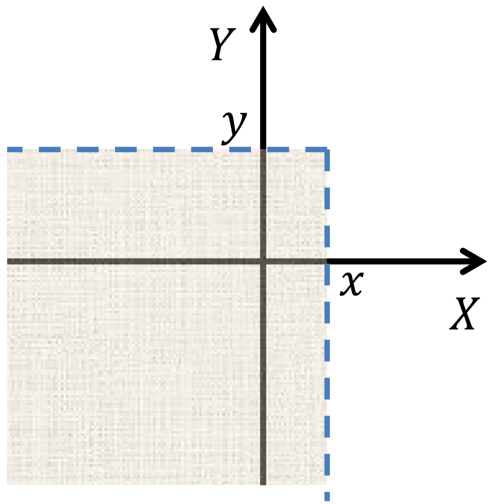
توابع احتمال کناری X و Y: $F_X(x)$, $f_X(x)$; $F_Y(y)$, $f_Y(y)$



A) احتمال کناری به صورت نوارهای موازی محور x و y ایجاد خواهد بود.

B) نمونه‌ای از توابع توام

تابع توزیع احتمال توام



$$F_{XY}(x,y) \triangleq P\{\xi: X(\xi) \le x, Y(\xi) \le y\} = P\{X \le x, Y \le y\}$$

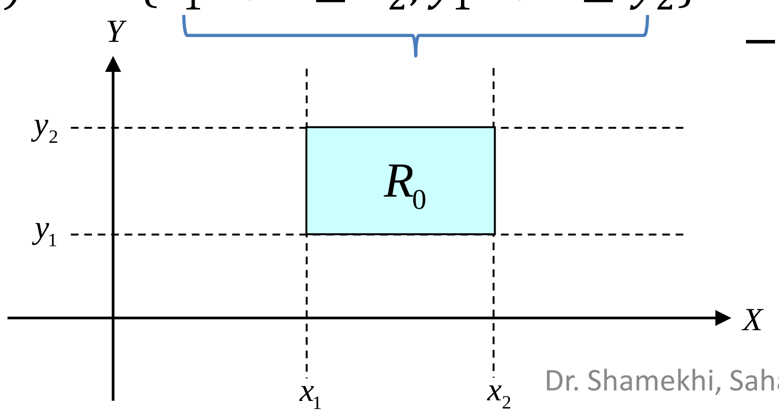
خواص:

1) $0 \le F_{XY}(x,y) \le 1$

2) $\begin{cases} F_{XY}(-\infty,y) = F_{XY}(x,-\infty) = F_{XY}(-\infty,-\infty) = 0 \\ F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1 \end{cases}$

3) $F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty), \qquad F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$

4) $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = F_{XY}(x_2,y_2) + F_{XY}(x_1,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1)$



تابع چگالی توام

تعریف:

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

خواص:

احتمال توام

1) $P(X \leq x, X \leq x) = F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2) $f_{XY}(x,y) \geq 0$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$

4) $\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x \end{cases}$

تابع چگالی احتمال کناری X:

تابع چگالی احتمال کناری Y:

به کمک تابع چگالی احتمال توام می‌توان احتمال هر زیر مجموعه دلخواه از فضای $\mathbb{R}^2$ را محاسبه کرد. y می‌تواند تابعی از x باشد یا برعکس.

5) $P\{(x,y) \in A\} = \iint_A f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=x_1}^{x_2}\int_{y=y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

توابع احتمال شرطی

بررسی وقوع پیشامدی به شرط وقوع پیشامدی دیگر را بررسی می‌کنیم.

احتمال شرطی در موارد متعدد به‌ویژه مشاهده آغشته به نویز کاربرد زیادی دارد.

$$r = \theta + n \quad \rightarrow\rightarrow \quad f(\theta|r)$$

مشاهده = مطلوب + نویز

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}, \qquad f_{XY}(x,y|A) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y|A)}{\partial x\,\partial y},$$

$$F_X(x|B) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u|B)du.$$

$$F_X(x|Y \le y) = P\{X \le x | Y \le y\} = \frac{P\{X \le x, Y \le y\}}{P\{Y \le y\}} = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$$

$$F_X(x|Y \le y) \equiv F_X(x|Y)$$

رابطه‌ی زنجیره‌ای برای CDF

توابع احتمال شرطی

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y|x)=F_Y(y)F_X(x|y)$$

$$f_X(x|Y=y)=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\Delta y\to 0}F_X(x|y-\Delta y<Y\le y)=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\Delta y\to 0}F_X(X\le x|y-\Delta y<Y\le y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\Delta y}^{y}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{y-\Delta y}^{y}f_Y(y)\mathrm{d}y}=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(x,y)\Delta y\mathrm{d}x}{\int_{y-\Delta y}^{y}f_Y(y)\Delta y}=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_X(x|Y=y)=f_X(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

رابطه‌ی زنجیره‌ای برای Pdf

$$f_{XY}(x,y)=f_Y(y)f_X(x|y)=f_X(x)f_Y(y|x)$$

با توجه به تفاوت بین تعاریف در CDF و Pdf:

$$\underset{Y=y}{f_X(x|y)}\neq\frac{\partial}{\partial x}\underset{Y\le y}{F_X(x|y)}$$

$$\Rightarrow$$

$$f_X(x|Y\le y)=\frac{\partial}{\partial x}F_X(x|y)$$

استقلال دو متغیر تصادفی

دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم گوییم هرگاه هر پیشامد دلخواه از X مستقل از هر پیشامد دلخواهی از Y باشد.

$$P\big((X(\xi) \le x) \cap (Y(\xi) \le y)\big) = P(X(\xi) \le x)P(Y(\xi) \le y)$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای استقلال دو متغیر تصادفی X وY آنست که پیشامدهایی به فرم $\{X \le x\}$ و $\{Y \le y\}$ آنها مستقل از هم باشند (لازم نیست همه پی.شامدها بررسی شود).

شرط لازم و کافی براس استقلال:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

شرط لازم و کافی براس استقلال:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

شرط لازم و کافی برای متغیرهای گسسته:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \text{for all} \quad i, j.$$

$$F_X(x \mid y) = F_X(x) \qquad f_X(x \mid y) = f_X(x)$$

$$F_Y(y \mid x) = F_Y(y) \qquad f_Y(y \mid x) = f_Y(y)$$

استقلال دو متغیر تصادفی

$$F_X(x \mid y) = F_X(x) \qquad f_X(x \mid y) = f_X(x)$$

$$F_Y(y \mid x) = F_Y(y) \qquad f_Y(y \mid x) = f_Y(y)$$

از تفکیک‌پذیر بودن متغیرهای X و Y در تابع توزیع توام یا تابع چگالی احتمال توام می‌توان استقلال X و Y را نتیجه گرفت.

$$F_{XY}(x, y) = g_1(x) g_2(y) \qquad \Rightarrow \qquad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$f_{XY}(x, y) = g_1(x) g_2(y). \qquad \Rightarrow \qquad X \perp\!\!\!\perp Y$$

امید ریاضی و ممان‌های متغیرهای تصادفی

تابع pdf یک متغیر تصادفی اطلاعات کاملی در خصوص متغیر مذکور ارایه می‌دهد. با این وجود در بسیاری از موارد علاقه‌مندیم که مشخصات آماری همچون میانگین داده‌ها را در اختیار داشته باشیم.

در حقیقت علاوه بر pdf یک متغیر تصادفی، توصیف برخی از ممان‌ها برای بیان رفتار یک متغیر تصادفی ضروری است و در برخی از موارد فقط این موارد در اختیار است.

ممان تابع $g(X)$ از متغیر تصادفی X به صورت زیر و به کمک امید ریاضی محاسبه می‌گردد:

$$\mathrm{E}\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

در انتخاب $g(X)$ محدودیتی وجود ندارد ولی عموما چند جمله‌ای از متغیر تصادفی است.

اگر متغیر تصادفی گسسته باشد آنگاه داریم:

$$\mathrm{E}\{g(X)\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(x) P(x = x_i)$$

به بیانی دیگر امید ریاضی تابع $g(X)$ عبارتست از متوسط مقادیری که g در بینهایت تکرار آزمایش اختیار می‌کند.

ممان‌ها در تابع $g(X,Y)$ که تابعی از دو متغیر است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathrm{E}\{g(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

در عمل تحت برخی شرایط میانگین در تعداد محدود آزمایش را برابر امید ریاضی در نظر می‌گیریم مثل ایستا بودن سیگنال:

$$\mathrm{E}\{g(X,Y)\}|_{(x,y)\in A} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y|A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A g(x,y) f_{XY}(x,y|A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

برخی از روابط کاربردی:

1. $\mathrm{E}\{g_1(X) + g_2(X)\} = \mathrm{E}\{g_1(X)\} + \mathrm{E}\{g_2(X)\}$

2. $If \quad X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \mathrm{E}\{g_1(X) g_2(X)\} = \mathrm{E}\{g_1(X)\}\mathrm{E}\{g_2(X)\}$

3. $\mathrm{E}\{g(X,Y)\} = \mathrm{E}_Y\underbrace{\{\mathrm{E}_X\{g(X,Y|Y)\}\}}_{\text{تابعی از } Y \; (Y=y)}$

ممان‌های مرتبه‌ی nام

- ممان مرتبه‌ی nام یک متغیر تصادفی:

$$\mathrm{E}\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\mathrm{d}x$$

- ممان مرتبه‌ی **اول** یا **میانگین** متغیر تصادفی (η_X یا m_X یا μ_X):

$$\mathrm{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$$

- ممان مرتبه‌ی **دوم** یا **خودهمبستگی** متغیر تصادفی (P_X یا r_X):

$$\mathrm{E}\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

از آنجاییکه بزرگی مقادیر X را نشان می‌دهد قدرت متغیر تصادفی هم نامیده می‌شود.

متغیر مرکزی $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = X - m_X$$

ممان مرکزی مرتبه‌ی nام:

$$\mathrm{E}\{\tilde{X}^n\} = \mathrm{E}\{(X - m_X)^n\}$$

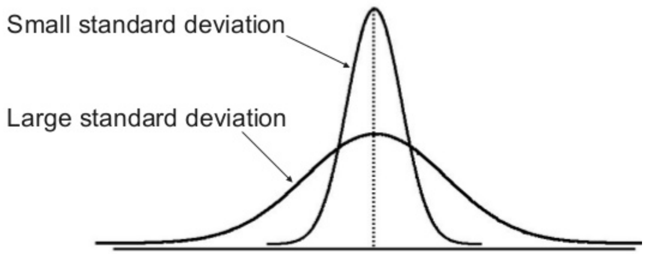
بدیهی است ممان مرکزی مرتبه‌ی اول بربر صفر است.

$$\mathrm{E}\{\tilde{X}\} = 0$$

- ممان **مرکزی** مرتبه‌ی **دوم** یا **واریانس** متغیر تصادفی(σ_X^2 یا c_X):

$$c_X = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\{\tilde{X}^2\} = \mathrm{E}\{(X - m_X)^2\}$$

این ممان معرف بزرگی مقادیری است که $\tilde{X}$ اختیار می‌کند، یا بزرگی انحراف X از مقدار میانگینش.
هرچه واریانس کوچکتر یعنی X حول میانگین جمع شده است و بر عکس واریانس بزرگتر به معنای پراکندگی داده‌ها در اطراف میانگین است.



در این روابط σ_X **انحراف معیار** متغیر تصادفی X می‌باشد.

می توان نشان داد:
$$c_X = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\{\tilde{X}^2\} = \mathrm{E}\{X^2\} - m_X^2$$

- معیارهایی برای بررسی انحراف از توزیع گوسین:
  - عدم تقارن یا چولگی (Skewness):

$$Skewness(X) = \frac{\mathrm{E}\{(X - m_X)^3\}}{\sigma^3}$$

  - کشیدگی (Kurtosis):

$$Kurtosis(X) = \frac{\mathrm{E}\{(X - m_X)^4\}}{\sigma^4}$$

هرچقدر شکل تابع چگالی احتمال قله‌ای‌تر و دنازرتر (heavy-tailed) میزان شاخص کشیدگی برای آن بیشتر است.

ممان متقابل

- ممان مرتبه‌ی nام نسبت به X و مرتبه‌ی mام نسبت به Y

$$E\{X^n Y^m\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- همبستگی متقابل X و Y:

$$r_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- همبستگی متقابل مرکزی مرتبه nام نسبت به X و مرتبه‌ی mام نسبت به Y:

$$E\{\tilde{X}^n \tilde{Y}^m\} = E\{(X - m_X)^n (Y - m_Y)^m\}$$

- همبستگی متقابل مرکزی مرتبه‌ی اول یا کوواریانس:

$$c_{XY} = \sigma_{XY} = E\{\tilde{X}\tilde{Y}\} = E\{(X - m_X)(Y - m_Y)\} = E\{XY\} - m_X m_Y = r_{XY} - m_X m_Y$$

استقلال و همبستگی

- اگر $X \perp\!\!\!\perp Y$ مستقل باشند

هیچ‌گونه وابستگی خطی و یا غیر خطی ندارند.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

- شرط ناهمبسته بودن:

$$X \not\perp Y \implies \mathrm{E}\{\tilde{X}\tilde{Y}\} = 0$$

یا

$$\tilde{X} \perp \tilde{Y}$$

این بدان معنی است که دو متغیر وابستگی خطی با هم ندارند (یعنی $Y \neq aX + b$)

- استقلال، ناهمبستگی را نتیجه می‌دهد.

ناهمبستگی $\Longleftarrow$ استقلال

ناهمبستگی $\not\Longleftarrow$ استقلال

- ضریب همبستگی:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad |\rho_{XY}| \leq 1$$

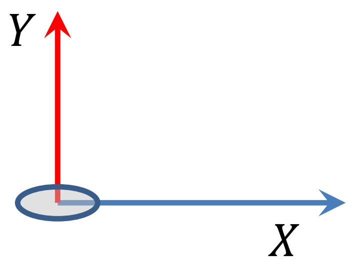
کاربرد ρ_{XY}: ویژگی‌هایی که انتخاب می‌شوند باید ضرایب همبستگی برابر و یا نزدیکی نداشته باشند.

- تعامد دو متغیر تصادفی:

$$\mathrm{E}\{XY\} = 0 \qquad X \perp Y$$

- شرط ناهمبستگی: $\mathrm{E}\{XY\} = \mathrm{E}\{X\}\mathrm{E}\{Y\}$ یا $\mathrm{E}\{\tilde{X}\tilde{Y}\} = 0$ یا $\sigma_{XY} = 0$ و یا $\rho_{XY} = 0$

سوال: تعبیر فیزیکی تعامد چیست؟



ممان شرطی: کافی است شرط را در تابع چگالی اعمال کنیم:

$$m_{X|y} = \mathrm{E}\{X|y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)\mathrm{d}x$$

$$r_{X|y} = P_{X|y} = \mathrm{E}\{X^2|y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x|y)\mathrm{d}x$$

$$\sigma^2{}_{X|y} = var(X|y) = \mathrm{E}\{X^2|y\} - (\mathrm{E}\{X|y\})^2$$

تابع مشخصه (Charachtristic Function)

برای هر متغیر تصادفی تابع مشخصه (CF) تعریف می‌گردد، که هم‌ارز pdf و CDF است. در حقیقت از هرکدام به دیگری می‌توان رسید.

محاسبه‌ی ممان‌ها در برخی موارد مشکل است. درصورتیکه از روی CF می‌توان ممان‌ها را راحت‌تر محاسبه کرد.

$$\boxed{\phi_X(\omega) = \mathrm{E}\{e^{j\omega X}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega X} f_X(x)\mathrm{d}x}$$

1. $|\phi_X(\omega)| \le 1 = \phi_X(0)$
2. $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\phi_X(\omega)|_{\omega=0} = j^n \mathrm{E}\{X^n\}$
3. $X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad \phi_{X+Y}(\omega) = \phi_X(\omega)\phi_Y(\omega)$ $\quad \Longrightarrow Z = X + Y \quad f_{X+Y}(z) = f_X(Z) * f_Y(Z)$
4. $\phi_X(-\omega) = \mathrm{F} f_X(x) \Longrightarrow f_X(x) = \mathrm{F}^{-1}\big(\phi_X(-\omega)\big)$
5. $\phi_X(-\omega) = \phi_X^*(-\omega)$

تابع مشخصه توام

- تابع مشخصه (CF) برای دو متغیر تصادفی

$$\boxed{\phi_{XY}(\omega_1,\omega_2) \triangleq \mathrm{E}\{e^{j(\omega_1 X+\omega_2 Y)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_1 X+\omega_2 Y)} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

1. $|\phi_{XY}(\omega_1,\omega_2)| \leq 1 = \phi_X(0,0)$
2. $\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial\omega_1^n\partial\omega_2^m}\phi_{XY}(\omega_1,\omega_2)|_{\omega_1=\omega_2=0} = j^{n+m}\mathrm{E}\{X^nY^m\}$
3. $X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad \phi_{X+Y}(\omega_1,\omega_2) = \phi_X(\omega_1)\phi_Y(\omega_2)$ ⟺ تفکیک پذیر بودن تابع CF توام برای دو متغیر تصادفی شرط لازم و کافی برای استقلال X و Y است.
4. $f_{XY}(x,y) \overset{FT}{\leftrightarrow} \phi_{XY}(-\omega_1,-\omega_2)$
5. $\begin{cases} \phi_X(\omega) = \phi_{XY}(\omega,0) \\ \phi_Y(\omega) = \phi_{XY}(0,\omega) \end{cases}$

- نمونه‌ای از توابع مشخصه توزیع‌های پرکاربرد:

Gaussian: $$\varphi(\omega) = e^{J\omega\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

Poisson: $$\varphi(\omega) = e^{\lambda(e^{J\omega}-1)}$$

Binomial: $$\varphi(\omega) = [1 - p(1 - e^{J\omega})]^n$$

Geometric: $$\varphi(\omega) = \frac{p}{1-(1-p)e^{J\omega}}$$

Uniform: $$\varphi(\omega) = \frac{e^{J\omega b} - e^{J\omega a}}{(b-a)J\omega}$$

قضیه حد مرکزی و توزیع نرمال

- مجموع بی‌نهایت متغیر تصادفی مستقل از هم، یک متغیر تصادفی نرمال می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \cdots, X_n, \qquad m_X = 0 \\ Y = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim N(0, \sigma^2).$$

مثال: نویز حرارتی

توزیع نرمال دارند چون از مقدار زیادی حرکت الکترون که مستقل از هم می‌باشند ایجاد شده‌اند.

- خواص توزیع نرمال
  - پایداری توزیع نرمال

$$X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2) \quad , i = 1,2,\cdots,n$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n \\ Y = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim N\left(\sum_i m_i , \sum_i \sigma_i^2\right)$$

تمرین:

۱- پایداری توزیع نرمال را اثبات کنید.

۲-رابطه توزیع چگالی احتمال Y را اثبات کنید.

۳- در مورد توزیع کوشی (Cauchy) مطالعه نموده و مفهوم واریانس بی‌نهایت را بررسی کنید.

دو متغیر تصادفی تواما نرمال (Jointly Gaussian)

- X و Y را تواما نرمال گوییم هرگاه هر ترکیب خطی از X و Y تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند.

مثال ۱: اگر X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال باشند به گونه‌ای که $N(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho)$
در صورتیکه Z را به صورت $Z = aX + bY$ تعریف کنیم، $f_Z(z)$ را محاسبه کنید.

برای تابع مشخصه Z داریم:

$$\Phi_Z(u) = E(e^{jZu}) = E(e^{j(aX+bY)u}) = E(e^{jauX+jbuY}) = \Phi_{XY}(au,bu).$$

براساس CF دو متغیر تواما نرمال:

$$\Phi_{XY}(u,v) = E(e^{j(Xu+Yv)}) = e^{j(\mu_X u+\mu_Y v)-\frac{1}{2}(\sigma_X^2 u^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y uv+\sigma_Y^2 v^2)}.$$

داریم:

$$\Phi_Z(u) = e^{j(a\mu_X+b\mu_Y)u-\frac{1}{2}(a^2\sigma_X^2+2\rho ab\sigma_X\sigma_Y+b^2\sigma_Y^2)u^2} = e^{j\mu_Z u-\frac{1}{2}\sigma_Z^2 u^2},$$

$$Z \sim N(\mu_Z,\sigma_Z^2),$$

$$\mu_Z \triangleq a\mu_X + b\mu_Y,$$
$$\sigma_Z^2 \triangleq a^2\sigma_X^2 + 2\rho ab\sigma_X\sigma_Y + b^2\sigma_Y^2.$$

مثال ۲: اگر X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال باشند در صورتیکه دو ترکیب خطی Z و W از این دو متغیر به صورت زیر داشته باشیم:

$$Z = aX + bY, \quad W = cX + dY.$$

Z و W نیز تواما نرمال خواهند بود.

$$\Phi_{ZW}(u,v) = E(e^{j(Zu+Wv)}) = E(e^{j(aX+bY)u+j(cX+dY)v})$$

$$= E(e^{jX(au+cv)+jY(bu+dv)}) = \Phi_{XY}(au+cv, bu+dv).$$

$$\Phi_{ZW}(u,v) = e^{j(\mu_Z u+\mu_W v)-\frac{1}{2}(\sigma_Z^2 u^2+2\rho_{ZW}\sigma_X\sigma_Y uv+\sigma_W^2 v^2)},$$

$$\mu_Z = a\mu_X + b\mu_Y,$$

$$\mu_W = c\mu_X + d\mu_Y,$$

$$\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + 2ab\rho\sigma_X\sigma_Y + b^2\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_W^2 = c^2\sigma_X^2 + 2cd\rho\sigma_X\sigma_Y + d^2\sigma_Y^2,$$

$$\rho_{ZW} = \frac{ac\sigma_X^2 + (ad+bc)\rho\sigma_X\sigma_Y + bd\sigma_Y^2}{\sigma_Z\sigma_W}.$$

خواص X و Y تواما نرمال

1. توزیع‌ای کناری آنها نیز نرمال خواهد بود:

$$Z = aX + bY = 1\times X + 0\times Y$$

2. از نرمال بودن تک تک X و Y نمی‌توان تواما نرمال بودن X و Y را نتیجه گرفت.

$$\left.\begin{array}{c} X \sim N(m_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2) \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ and } Y \text{ are jointaly Normal}$$

شرط استقلال

3. توزیع‌های شرطی X و Y هم نرمال خواهند بود. $f(Y|X)$ $f(X|Y)$

4. از ناهمبستگی X و Y می توان استقلال آنها را نیز نتیجه گرفت.

(اثبات)

$$\left.\begin{array}{c} Jointaly\ Normal \\ Uncorrelated \end{array}\right\} \Rightarrow Independent$$

5. اگر X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال باشند در صورتیکه دو ترکیب خطی Z و W از این دو متغیر نیز تواما نرمال خواهند بود.

متغیر تصادفی مختلط

بر اساس تعاریف مربوط به متغیرهای تصادفی ویژگی‌های آماری این متغیرها قابل محاسبه است.

متغیر تصادفی حقیقی $\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$

متغیر تصادفی مختلط $\Omega \xrightarrow{Z} \mathbb{C}$ فضای اعداد مختلط

$$Z(\zeta) = X(\zeta) + jY(\zeta)$$

به عنوان مثال:

$$m_Z = m_X + jm_Y$$

$$P_Z = r_Z \triangleq \mathrm{E}\{ZZ^*\} = r_X + r_Y$$

$$\sigma_Z^2 = var(Z) \triangleq \mathrm{E}\left|\tilde{Z}\right|^2 = \mathrm{E}\left(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2\right) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

متغیر تصادفی $Z = X + jY$ مختلط نرمال است، هرگاه X و Y تواما نرمال باشد