

مبحث سوم

طیف قدرت

۱-۳) تعریف طیف قدرت و قدرت متقابل فرآیندها و ارتباط آنها با تابع همبستگی:

در این قسمت فرآیند درحوزه زمان را با حروف کوچک نشان خواهیم داد:

$$x(t, \omega) = x(t) \quad \text{فرآیند در حوزه زمان}$$

$$R_x(t, t) = E|x(t)|^2 \quad \text{قدرت لحظه‌ای فرآیند}$$

انرژی فرآیند یعنی انتگرال گیری روی قدرت لحظه‌ای فرآیند:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t, t) dt$$

قدرت فرآیند برابر با متوسط زمانی قدرت لحظه‌ای است:

$$P_x = E\langle |x(t)|^2 \rangle = \langle E|x(t)|^2 \rangle = \langle R_x(t, t) \rangle$$

توابع زمانی فرآیند معمولاً از نوع قدرت هستند و غالباً تبدیل فوریه ندارند. ولی چون معمولاً با فرایندها در یک فاصله زمانی مشخص مثل $[-T, T]$ سروکار داریم و با محدود کردن فرآیند به این فاصله توابع زمانی آن از نوع انرژی می‌شوند، لذا می‌توان از تبدیل فوریه فرآیند هم استفاده نمود.

$$x_T(t, \omega) \xrightarrow{f} x_T(f, \omega)$$

چون ω نقطه‌ای از فضای نمونه است. تبدیل فوریه نیز فرآیند می‌شود که پارامتر آن فرکانس است.

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

محاسبه توابع احتمال فرآیند حوزه فرکانس در حالت کلی عملاً مقدور نیست حتی یک بعدی آن. چون $x_T(f)$ تابعی از بی نهایت متغیر تصادفی است و نیز چون فرآیند حاصل درحالت کلی خواص

ساده کننده‌ای مانند استقلال، ناهمبستگی و یا تعامد متغیرهای تصادفی ندارد از این رو استفاده از تبدیل فوریه فرآیند عملاً مفید نیست. ولی پیدا کردن طیف انرژی و طیف قدرت آن ساده است (از روی تابع همبستگی) و اطلاعات مفیدی را در مورد فرآیند به ما می‌دهد:

$$E |x_T(f)|^2 \quad \text{طیف انرژی فرآیند محدود شده به } [-T, T]$$

$$S_X(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} E \frac{|X_T(f)|^2}{2T} \quad \text{طیف قدرت}$$

طیف انرژی توزیع انرژی $x_T(t)$ را بین مولفه‌های مختلف فرکانسی نشان می‌دهد در حالیکه $S_X(f)$ توزیع قدرت را بین مولفه‌های مختلف فرکانسی $x(t)$ نشان می‌دهد. خواهیم دید.

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

* قضیه: طیف قدرت با همبستگی رابطه روبرو را دارد:

$$S_X(f) \xleftrightarrow{f} \langle R_X(t+\tau, t) \rangle$$

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \frac{|X_T(f)|^2}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_T^*(\beta) e^{+j2\pi f \beta} d\beta \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E \{x_T(\alpha) x_T^*(\beta)\} e^{-j2\pi f(\alpha-\beta)} d\alpha d\beta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\beta=-T}^T \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_X(\alpha, \beta) e^{-j2\pi f(\alpha-\beta)} d\alpha d\beta \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\beta=-T}^T \int_{\tau=-\infty}^{\infty} R_X(\beta+\tau, \beta) e^{-j2\pi f \tau} d\beta d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(\beta+\tau, \beta) d\beta \right]}_{\langle R_X(t, \tau, t) \rangle} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ \Rightarrow S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle R_X(t+\tau, t) \rangle}_{\tau \text{ و } t} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \end{aligned}$$

یعنی با داشتن طیف قدرت می‌توان متوسط زمانی تابع همبستگی را بدست آورد و نیز با داشتن تابع همبستگی طیف قدرت را.

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle R_X(t+\tau, t) \rangle e^{-j2\pi f \tau} d\tau \xleftrightarrow{f} \langle R_X(t+\tau, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

* قدرت فرآیند:

$$P_X = \langle R_X(t, t) \rangle = \langle R_X(t+\tau, t) \rangle \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f \tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$$

*اگر فرآیند ساکن باشد داریم:

$$\langle R_x(t+\tau, t) \rangle = \langle R_x(\tau) \rangle = R_x(\tau)$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{f} S_x(f)$$

$$\begin{cases} S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \end{cases}$$

*روابط *Wiener Khin Chin*:

*طیف قدرت متقابل Y, X :

$$S_{XY}(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(f) \cdot Y_T^*(f)}{2T}$$

می توان نشان داد که در حالت کلی رابطه زیر صادق است.

$$S_{XY}(f) \xleftrightarrow{f} \langle R_{XY}(t+\tau, t) \rangle$$

و در حالت تواما ساکن X و Y :

$$S_{XY}(f) \xleftrightarrow{f} R_{XY}(\tau)$$

(۳-۱) چند مثال:

الف - فرآیند سفید:

$$\begin{cases} m_x(t) = 0 \\ R_x(t+\tau, t) = g(\tau)\delta(\tau) \end{cases}$$

$$\langle R_x(t+\tau, t) \rangle = \langle g(\tau)\delta(\tau) \rangle = \delta(\tau) \langle g(t) \rangle = N_0\delta(\tau) \xleftrightarrow{f} S_x(f) = N_0$$

ب) فرآیند ضربه های پواسن با چگالی یکنواخت:

$$\begin{cases} m_x(\tau) = \lambda \\ C_x(t+\tau, t) = \lambda\delta(\tau) \end{cases} \Rightarrow R_x(t+\tau, t) = C_x(t+\tau, t) + m_x(t+\tau)m_x^*(t) = \lambda\delta(\tau) + \lambda^2$$

$$\Rightarrow \langle R_x(t+\tau, t) \rangle = \lambda\delta(\tau) + \lambda^2 \xleftrightarrow{f} S_x(f) = \lambda + \lambda^2\delta(f)$$

ج) یک مولفه فرکانسی با دامنه و فاز تصادفی:

$$X(t) = ce^{j2\pi f_0 t} = Ae^{j2\pi f_0 t + jB}$$

$$R_x(t+\tau, t) = E\{X(t+\tau) \cdot X^*(t)\} = E\{Ae^{j2\pi f_0 t + j2\pi f_0 \tau + jB} \cdot Ae^{-j2\pi f_0 t - jB}\} =$$

$$E\{A^2 e^{j2\pi f_0 \tau}\} = E\{A^2\} \cdot e^{j2\pi f_0 \tau} = R_x(\tau)$$

$$R_X(\tau) = E\{A^2\}e^{j2\pi f_0\tau} \xleftrightarrow{f} S_X(f) = E\{A^2\}\delta(f - f_0)$$

د) چند مولفه فرکانسی با دامنه و فازهای تصادفی:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{j2\pi f_i t + j\beta_i}$$

$$R_X(t + \tau, t) = E \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_i e^{j2\pi f_i t + j2\pi f_i \tau + j\beta_i} A_k e^{-j2\pi f_k t - j\beta_k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n E A_i A_k e^{j2\pi t(f_i - f_k)} e^{j2\pi f_i \tau + j(\beta_i - \beta_k)}$$

$$\Rightarrow R_X(t + \tau, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n E A_i A_k \langle e^{j2\pi t(f_i - f_k)} \rangle e^{j2\pi f_i \tau + j(\beta_i - \beta_k)}$$

$$\Rightarrow R_X(t + \tau, t) = \sum_{k=1}^n E A_k^2 e^{j2\pi f_k \tau} \xleftrightarrow{f} S_X(f) = \sum_{k=1}^n E A_k^2 \delta(f - f_k)$$

ه) مولفه فرکانسی حقیقی با فرکانس و فاز تصادفی:

$$X(t) = k \cos(2\pi A t + B)$$

$$R_X(t + \tau, t) = E\{k^2 \cos(2\pi A t + 2\pi A \tau + B) \cdot \cos(2\pi A t + B)\} = \frac{k^2}{2} E\{\cos(4\pi A t + 2\pi A \tau + B) + \cos(2\pi A \tau)\}$$

$$\Rightarrow R_X(t + \tau, t) = \frac{k^2}{2} E\{\cos 2\pi A \tau\} \xleftrightarrow{f} S_X(f) = \frac{k^2}{2} f\{E[\cos 2\pi A \tau]\}$$

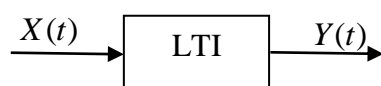
$$\Rightarrow S_X(f) = \frac{k^2}{2} E\left\{\frac{1}{2}\delta(f - A) + \frac{1}{2}\delta(f + A)\right\} = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(f - a) + \delta(f + a)\} f_A(a) da$$

$$= \frac{k^2}{4} [f_A(f) + f_A(-f)]$$

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{4} f_A(f) df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{4} f_A(-f) df = \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{2}$$

که از روی $\langle R_X(t + \tau, t) \rangle|_{\tau=0}$ نیز قابل محاسبه است.

۲) رابطه طیف قدرت در ورودی و خروجی سیستم LTI:



خروجی $e^{j2\pi f t} \rightarrow e^{j2\pi f t} H(f)$ ورودی

به این دلیل و خاصیت جمع آثار سیستم خطی است که استفاده از تبدیل فوریه برای سیستم های

LTI بسیار مفید است.

۱-۲) رابطه بین طیف قدرت ورودی و خروجی

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot R_X(t_1 - \alpha, t_2) d\alpha \quad \text{قبلا دیدیم که}$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = h(t_1) * R_X(t_1, t_2)$$

$$\Rightarrow R_{YX}(t + \tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot R_X(t - \alpha + \tau, t) d\alpha \Rightarrow \langle R_{YX}(t + \tau, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \langle R_X(t + \tau - \alpha, t) \rangle d\alpha$$

$$\Rightarrow S_{YX}(f) = f\{\langle R_{YX}(t + \tau, t) \rangle\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot S_X(f) \cdot e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha \Rightarrow S_{YX}(f) = S_X(f) \cdot H(f)$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) * h^*(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1, t_2 - \alpha) h^*(\alpha) d\alpha$$

$$\Rightarrow \langle R_{XY}(t + \tau, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t + \tau, t - \alpha) h^*(\alpha) d\alpha$$

$$\Rightarrow S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha) \cdot S_X(f) \cdot e^{j2\pi f\alpha} d\alpha = S_X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha \right]^* = S_X(f) \cdot H^*(f)$$

$$\Rightarrow S_{XY}(f) = S_X(f) \cdot H^*(f)$$

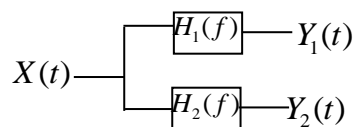
به همین ترتیب می توان نشان داد:

$$S_Y(f) = S_{XY}(f) \cdot H(f)$$

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot H^*(f) \cdot H(f)$$

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

در حالت کلی اگر داشته باشیم:



$$S_{Y_1 Y_2}(f) = S_X(f) H_1(f) \cdot H_2^*(f) \quad \text{در این صورت:}$$

۲-۲- چند مثال:

الف) فرآیند PAM با دامنه های WSS

$$D(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow X(t)$$

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - kT) = D(t) * h(t)$$

$$S_x(f) = S_D(f) |H(f)|^2 = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_A(i)}{T} e^{-j2\pi f_i T} \right\} |H(f)|^2$$

ب) فیلتر میانگذر با باند باریک

$$X(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow Y(t)$$

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2 = \begin{cases} S_X(f) & |f - f_0| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & |f - f_0| > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

۳. خواص طیف قدرت

(۱) طیف قدرت در حالت کلی تابع حقیقی و غیر منفی (حتی برای فرآیند مختلط) بوده و اگر

فرآیند حقیقی باشد، طیف قدرت آن تقارن زوج خواهد داشت.

*اثبات:

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E |X_T(f)|^2$$

طبق تعریف فوق حقیقی و غیر منفی بودن واضح است. در فرآیند حقیقی:

$$\text{تقارن هرمیتی} \quad X_T(t) \leftrightarrow X_T(f) = X_T^*(-f)$$

$$\Rightarrow S_x(-f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) X_T^*(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E |X_T(f)|^2$$

مختلط بودن S_{XY} واضح است. اگر فرآیند حقیقی باشد.

$$X_T(f) = X_T^*(-f) ; \quad Y_T(f) = Y_T^*(-f)$$

$$S_{XY}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [X_T(-f) Y_T^*(-f)] = S_{XY}^*(f)$$

(۲) طیف قدرت متقابل در حالت کلی تابع مختلط است (حتی برای فرآیندهای حقیقی) و اگر

فرآیندها حقیقی باشند طیف قدرت متقابل تقارن هرمیتی پیدا می کند:

$$S_{XY}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [X_T(f) Y_T^*(f)]$$

(۳) طیف قدرت فرآیند تابعی است که مجموع قدرت را بین مولفه های فرکانسی فرآیند نشان می دهد و انتگرال آن کل قدرت فرآیند را نشان می دهد.

(۴) طیف قدرت متقابل دو فرآیند تابعی است که همبستگی بین دو متغیر تصادفی $Y_T(f), X_T(f)$ (مولفه های فرکانسی دو فرآیند) را نشان می دهد.

$$S_{XY}(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T(f) \cdot Y_T^*(f)]$$

و در حالت کلی داریم:

$$|S_{XY}(f)|^2 \leq S_X(f) \cdot S_Y(f)$$

که همان نامساوی شوارتز بوده و برای مولفه های فرکانسی فرآیندها (متغیرهای تصادفی $Y_T(f), X_T(f)$) نوشته شده است.

(۵) در حالت کلی داریم:

$$S_{X+Y}(f) = S_X(f) + S_Y(f) + S_{XY}(f) + S_{YX}(f)$$

$$S_{YX}(f) = S_{XY}^*(f)$$

و اگر فرآیندها متعامد باشند:

$$S_{X+Y}(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$

$$S_{XY}(f) = 0$$

*اثبات:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = EX(t_1)Y^*(t_2) = 0$$

$$\Rightarrow R_{XY}(t + \tau, t) = 0 ; \forall t, \tau$$

$$\langle R_{XY}(t + \tau, t) \rangle = 0 \Rightarrow S_{xy}(f) = 0$$

(۶) اگر دو فرآیند باند فرکانسی مشترک نداشته باشند یعنی $\forall f, S_X(f)S_Y(f) = 0$ می توان

نتیجه گرفت: $S_{XY}(f) = 0$. یعنی مولفه های فرکانسی $X_T(f)$ و $Y_T(f)$ آنها متعامد است و اگر

متوسط صفر داشته باشند ناهمبسته و اگر نرمال هم باشند مستقل است.

*اثبات:

براساس نامساوی شوارتز داریم:

$$|S_{XY}(f)|^2 \leq S_X(f) \cdot S_Y(f) = 0$$

$$\Rightarrow S_{XY}(f) = 0$$

نتیجه دیگر: $\langle R_{XY}(t+\tau, t) \rangle = 0$ و اگر فرآیندها تواما ساکن باشند:

یعنی کلیه متغیرهای تصادفی دو فرآیند در حوزه زمان متعامد خواهند بود. پس در فرآیند تواما ساکن نرمال با متوسط صفر اگر باند فرکانسی مشترکی نداشته باشند کاملاً از یکدیگر مستقل اند.

بهمین خاطر است که در عمل با فیلتر، نویز خارج باند را حذف می کنیم و خیالمان راحت است که اطلاعاتی را از دست نداده ایم. که البته در حالت کلی درست نیست مگر آنکه فرآیندها تواما ساکن و نرمال باشند. وقتی فرآیندها فقط تواماً ساکن هستند می توانیم بگوییم از نظر تخمین خطی سیگنال حذف نویز خارج باند اطلاعاتی را از دست نمی دهد.

(۷) در حالت کلی داریم:

$$S_x(f) = S_{\tilde{x}}(f) + S_{m_x}(f)$$

*اثبات:

$$X(t) = \tilde{X}(t) + m_x(t)$$

حالت خاصی از فرآیند بوده و تابع یقینی است.

$$E \tilde{X}(t_1) \cdot m_x^*(t_2) = m_x^*(t_2) \cdot E[\tilde{X}(t_1)] = 0 \Rightarrow \tilde{X}(t), m_x(t) \text{ متعامدند}$$

$$\Rightarrow S_X(f) = S_{\tilde{x}+m_x}(f) = S_{\tilde{x}}(f) + S_{m_x}(f)$$

و اگر فرآیند ساکن با متوسط m_x باشد.

$$m_x(t) = m_x$$

$$S_{m_x}(f) \xleftarrow{f} \langle E m_x(t+\tau) m_x^*(t) \rangle = \langle m_x(t+\tau) \cdot m_x^*(t) \rangle = \langle m_x \cdot m_x^* \rangle = |m_x|^2$$

$$\Rightarrow S_{m_x}(f) = |m_x|^2 \delta(f)$$

$$\Rightarrow S_X(f) = S_{\tilde{x}}(f) + S_{m_x}(f) \Rightarrow S_X(f) = S_{\tilde{x}}(f) + |m_x|^2 \delta(f) \text{ برای فرآیند ساکن}$$

(۸) با توجه به غیر منفی بودن تابع طیف قدرت از صفر بودن مجموع دو طیف قدرت در یک فرکانس (یا باندی از فرکانس) می توان صفر بودن تک تک آنها را نتیجه گرفت. به عنوان مثال:

$$S_X(f) + S_Y(f) = 0, f \in (f_1, f_2) \Rightarrow \begin{cases} S_X(f) = 0 & f \in (f_1, f_2) \\ S_Y(f) = 0 & f \in (f_1, f_2) \end{cases}$$

و یک کاربرد مهم آن اینکه اگر در طیف قدرت یک فرآیند ساکن در $f=0$ ضربه ای نداشته باشیم تابع متوسط m_X آن فرآیند صفر است.

$$S_X(f) = S_X^-(f) + |m_X|^2 \delta(f)$$

اگر $S_X(f)$ در مبدا ضربه ای نداشته باشد (با جایگذاری $f=0$ در رابطه فوق خواهیم دید)

$$S_X^-(f=0) = 0, |m_X|^2 \delta(0) = 0 \Rightarrow m_X = 0$$

*تبصره:

البته از وجود ضربه در مبدا طیف قدرت فرآیند ساکن نمی توان نتیجه گرفت که متوسط فرآیند صفر نیست. چرا که این ضربه ممکن است مربوط به $S_X^-(f)$ باشد.

*مثال: $X(t) \triangleq Y(t) + A$ مطلوبست محاسبه $S_X^-(f)$

که در آن $Y(t)$ فرآیند با $m_Y(t) = 0$; A متغیر تصادفی با متوسط صفر و مستقل از فرآیند Y است.

$$\tilde{X}(t) = X(t) - E[Y(t) + A] = X(t); m_X(t) = 0$$

$$R_X^-(t+\tau, t) = E[Y(t+\tau) + A][Y(t) + A]^*] = R_Y(t+\tau, t) + EA^*EY(t) + EAEY^*(t) + E|A|^2$$

$$\Rightarrow R_X^-(t+\tau, t) = R_Y(t+\tau, t) + E|A|^2$$

$$\Rightarrow \langle R_X^-(t+\tau, t) \rangle = \langle R_Y(t+\tau, t) \rangle + \underbrace{\langle E|A|^2 \rangle}_{E|A|^2} \xrightarrow{f} S_X^-(f) = S_Y(f) + E|A|^2 \delta(f)$$

۳-۲) نکات و خواص در مورد تابع همبستگی:

۱- تابع همبستگی فرآیند بازای $\tau=0$ مقدار قدرت لحظه ای فرآیند را بدست می دهد و متوسط زمانی قدرت لحظه ای هم قدرت فرآیند را.

$$\text{قدرت لحظه ای} = E|X(t)|^2 = R_X(t+0, t)$$

$$\text{قدرت فرآیند} = \langle E | X(t)|^2 \rangle = \langle R_X(t, t) \rangle$$

۲- تابع همبستگی در حالت کلی تابع است مختلط با تقارن هرمیتی:

$$R_X^*(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1) \Rightarrow R_X^*(\tau) = R_X(-\tau) \quad \text{در حالت ساکن}$$

اگر فرآیند حقیقی باشد تابع همبستگی هم حقیقی می شود و تقارن زوج خواهد داشت یعنی:

$$\begin{cases} R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1) \\ R_X(-\tau) = R_X(\tau) \end{cases}$$

۳- در حالت کلی داریم $|R_X(t_1, t_2)|^2 \leq R_X(t_1, t_2)R_X(t_2, t_1)$ (بر اساس نامساوی شوارتز)

۴- در حالت کلی تابع همبستگی یک تابع معین غیر منفی است (NND) یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t_1, t_2) z(t_1) z^*(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \quad \forall z(t) \quad (z(t) \text{ یک تابع یقینی})$$

*اثبات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t_1, t_2) z(t_1) z^*(t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1) X^*(t_2) z(t_1) z^*(t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$E \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1) z(t_1) dt_1 \right|^2 \geq 0$$

۵- برای فرآیند ساکن در حالت کلی داریم: $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ (یعنی ماکزیمم مقدار تابع

همبستگی در مبداست)

و اگر بازای $\tau = T_0$ داشته باشیم: $R_X(T_0) = R_X(0)$ ، می توان پرریودیک بودن تابع همبستگی یعنی

$$R_X(\tau + T_0) = R_X(\tau) ; \forall \tau$$

*اثبات: رابطه $R_X(\tau) \leq R_X(0)$ همان نامساوی شوارتز در حالت ساکن می باشد یعنی:

$$|R_X(t + \tau, t)|^2 \leq R_X(t, t)R_X(t + \tau, t + \tau) \Rightarrow |R_X(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_X(0) \quad \text{در حالت ساکن}$$

و برای اثبات قسمت دوم:

$$R_X(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f T_0} df$$

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |S_X(f)| df = \int_{-\infty}^{\infty} |S_X(f) e^{j2\pi f T_0}| df$$

$$\Rightarrow S_X(f) e^{j2\pi f T_0} = S_X(f) \Rightarrow S_X(f) e^{j2\pi f (T_0 + \tau)} = S_X(f) e^{j2\pi f \tau}$$

$$\xleftarrow{f} R_X(\tau) = R_X(\tau + T_0)$$

۶- از پریودیک بودن تابع همبستگی فرآیند ساکن حقیقی می توان پریودیک بودن خود فرآیند را نتیجه گرفت و بالعکس:

$$\begin{cases} R_X(\tau+T_0) = R_X(\tau) \\ \forall \tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(t+T_0) = X(t) \\ \forall t \end{cases}$$

*اثبات:

$$\begin{aligned} X(t+T_0) = X(t) &\Leftrightarrow E | X(t+T_0) - X(t) |^2 = R_X(0) + R_X(0) - R_X(T_0) - R_X(-T_0) \\ &= 2R_X(0) - 2R_X(T_0) = 0 \Leftrightarrow R_X(0) = R_X(T_0) \Leftrightarrow R_X(\tau+T_0) = R_X(\tau) \end{aligned}$$

۴- سیستم با تابع تبدیل کسری و فرآیند با طیف قدرت کسری:

۴-۱) سیستم با تابع تبدیل کسری و فرم کلی پاسخ ضربه آن:

$$X(t) \rightarrow \boxed{\text{Linear System}} \rightarrow Y(t)$$

یک مدل مناسب و رایجی که برای سیستم های خطی در نظر می گیرند بفرم رابطه زیر است:

$$a_N Y^{(N)}(t) + a_{N-1} Y^{(N-1)}(t) + \dots + a_1 Y'(t) + a_0 Y(t) = b_M X^{(M)}(t) + \dots + b_1 X'(t) + b_0 X(t)$$

در حالت کلی ضرایب می تواند مختلط باشد و ضمناً بستگی به t هم داشته باشد (خطی تغییرپذیر با زمان).

حالت LTI را در نظر می گیریم که ضرایب ثابتند.

شرایط اولیه را صفر می گیریم (حالتی که برای $X(t)=0$ داریم $Y(t)=0$) و از طرفین تبدیل لاپلاس می گیریم.

$$Y(S)[1 + a_1 S + \dots + a_N S^N] = X(S)[b_0 + b_1 S + \dots + b_M S^M]$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{k=0}^N a_k (j2\pi f)^k} = \frac{B_M(j2\pi f)}{A_N(j2\pi f)}$$

$$H(f) = \frac{B_M(j2\pi f)}{\prod_{k=1}^N (j2\pi f - \Gamma_k)} = \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{j2\pi f - \Gamma_n} + \sum_{i=0}^{M-N} \alpha_i (j2\pi f)^i ; \text{ if } M \geq N$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^N r_n e^{\Gamma_n t} + \sum_{i=1}^{M-N} C_i \delta^{(i)}(t)$$

۲-۴- فرایند با طیف کسری و شبیه سازی آن

یک تابع مفروض را معمولاً می توان با دقت خوبی بصورت یک تابع کسری تقریب زد و بهمین دلیل معمولاً طیف قدرت فرآیندها را در عمل بصورت تابع کسری مدل می کند.

$$S_x(f) = \frac{Q(f)}{P(f)} \quad \text{تابع کسری و نسبت دو چند جمله ای:}$$

تابع همبستگی فرایند فوق:

$$S_X(f) = K^2 \frac{\prod_{i=1}^M (j2\pi f - z_i)(-j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{k=1}^N (j2\pi f - \Gamma_k)(-j2\pi f - \Gamma_k^*)} = \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{j2\pi f - \Gamma_k} + \sum_{k=1}^N \frac{r_k^*}{-j2\pi f - \Gamma_k^*} + C_0$$

با فرض اینکه

$$S_X(\infty) \neq \infty$$

$$C_0 = S_X(\infty)$$

$$S_X(f) = \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{j2\pi f - \Gamma_k} - \sum_{k=1}^N \frac{r_k^*}{j2\pi f + \Gamma_k^*} + C_0$$

از دو ریشه Γ_k و $-\Gamma_k^*$ یکی در *LHP* و دیگری در *RHP* خواهد بود می توان Γ_k را *LHP* در نظر گرفت.

با فرض ساکن بودن داریم:

$$R_X(\tau) = \sum_{k=1}^N r_k e^{\Gamma_k \tau} u(\tau) - \sum_{k=1}^N -r_k^* e^{-\Gamma_k^* \tau} u(-\tau) + c_0 \delta(\tau)$$

$$R_X(\tau) = \left(\sum_{k=1}^N r_k e^{\Gamma_k \tau} \right) u(\tau) + \left(\sum_{k=1}^N r_k^* e^{-\Gamma_k^* \tau} \right) u(-\tau) + c_0 \delta(\tau)$$

تقارن هرمتیک بوضوح دیده می شود. شبیه سازی فرآیند ساکن با طیف مفروض:

$$W(t) \xrightarrow{H(f)} X(f)$$

$$S_X(f) = S_W(f) |H(f)|^2$$

$$|H(f)|^2 = S_X(f) = \frac{Q(f)}{P(f)} = H(f)H^*(f) = K^2 \frac{\prod_{i=1}^M (j2\pi f - z_i)(-j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{k=1}^N (j2\pi f - \Gamma_k)(-j2\pi f - \Gamma_k^*)}$$

از هر دو عامل مزدوج یکی را به اختیار می توان به $H(f)$ و دیگری را به $H^*(f)$ نسبت داد. لذا جواب های مختلفی می توان برای $H(f)$ بدست آورد. اگر جواب علی بخواهیم باید از عوامل مخرج، عامل با ریشه LHP را انتخاب کنیم. البته باز هم جواب منحصر به فرد نخواهد بود.

$$\text{اگر } H(f) = k \frac{\prod_{i=1}^M (j2\pi f - z_i)}{\prod_{k=1}^N (j2\pi f - \Gamma_k)} \leftrightarrow h(t)$$

$$X(t) = w(t) * h(t) ; X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) w(t - \alpha) d\alpha$$

برای تعیین k کافی است از رابطه فوق $|H(f)|^2$ را تعیین کرده (برحسب k_0) و با $|H(f)|^2$ مفروض در یک فرکانس دلخواه مقایسه نماییم (مثلا $f \rightarrow \infty$).

* مثال: فرآیند ساکن با طیف قدرت $S_X(f) = \frac{6}{(2\pi f)^4 + 5(2\pi f)^2 + 4}$ را در نظر بگیرید. پاسخ

ضربه سیستم علی لازم برای شبیه سازی را بدست آورید.

$$\Rightarrow S_X(s) = \frac{6}{s^4 - 5s^2 + 4} = \infty \Rightarrow P = \begin{cases} -1, +1 \\ -2, +2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s-2} \Rightarrow R_X(\tau) = e^{-\tau}u(\tau) + e^{\tau}u(-\tau) + \frac{1}{2}e^{-2\tau}u(\tau) + \frac{1}{2}e^{2\tau}u(-\tau)$$

$$\Rightarrow R_X(\tau) = e^{-|\tau|} + \frac{1}{2}e^{-2|\tau|}$$

تابع تبدیل سیستم علی لازم برای شبیه سازی:

$$H(s) = \frac{k_0}{(s+1)(s+2)}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{k_0^2}{(2\pi f)^4} = \frac{6}{(2\pi f)^4} \Rightarrow k_0 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow k_0 = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{\sqrt{6}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\sqrt{6}}{s+1} + \frac{-\sqrt{6}}{s+2} \Rightarrow h(t) = \sqrt{6}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$W(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow X(t)$$

$$X(t) = h(t) * W(t) = \int_0^\infty \sqrt{6}(e^{-\alpha} - e^{-2\alpha})W(t-\alpha)d\alpha$$

۵) فرآیندهای عمود بر مزدوج و فرآیندهای میانگذر:

۵-۱) فرآیندهای عمود بر مزدوج و خواص آنها:

* تعریف: فرآیند $Z(t)$ را عمود بر مزدوج گوئیم هرگاه:

$$Z(\cdot) \perp Z^*(\cdot) \Leftrightarrow R_{zz^*}(t_1, t_2) = 0 \Leftrightarrow EZ(t_1) \cdot (Z^*(t_2))^* = 0$$

$$\forall t_1, t_2 \qquad \forall t_1, t_2$$

* خواص فرآیندهای عمود بر مزدوج: $Z(t) = X(t) + jY(t)$

$$1) \begin{cases} R_X(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \text{Re}[R_z(t_1, t_2)] \\ R_{YX}(t_1, t_2) = -R_{XY}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \text{Im}[R_z(t_1, t_2)] \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} S_X(f) = S_Y(f) = \frac{1}{4} [S_z(f) + S_z(-f)] \\ S_{YX}(f) = -S_{XY}(f) = \frac{1}{4j} [S_z(f) - S_z(-f)] \end{cases}$$

$$3) Z(t) \alpha WSS \Leftrightarrow (WSS) \text{ تواما ساکن } X(t), Y(t)$$

* اثبات ۱:

$$E[Z(t_1)Z(t_2)] = 0 \Rightarrow E\{[X(t_1) + jY(t_1)][X(t_2) + jY(t_2)]\} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_X(t_1, t_2) - R_Y(t_1, t_2) = 0 \\ R_{XY}(t_1, t_2) + R_{YX}(t_1, t_2) = 0 \end{cases} (I)$$

$$R_Z(t_1, t_2) = E(X(t_1) + jY(t_1))(X(t_2) - jY(t_2)) =$$

$$= \underbrace{R_X(t_1, t_2) + R_Y(t_1, t_2)}_{\text{Re } R_Z(t_1, t_2)} + j \underbrace{[R_{YX}(t_1, t_2) - R_{XY}(t_1, t_2)]}_{\text{Im } R_Z(t_1, t_2)} \quad (II)$$

خاصیت (۱) برقرار است $(I), (II) \Rightarrow$

* اثبات ۲:

از خاصیت (۱) داریم:

$$R_X(t + \tau, t) = R_Y(t + \tau, t) = \frac{1}{4} [R_Z(t + \tau, t) + R_Z^*(t + \tau, t)]$$

$$R_{YX}(t + \tau, t) = -R_{XY}(t + \tau, t) = \frac{1}{4j} [R_Z(t + \tau, t) - R_Z^*(t + \tau, t)]$$

نسبت به متوسط زمانی و سپس نسبت به τ تبدیل فوریه می گیریم:

$$\begin{cases} S_X(f) = S_Y(f) = \frac{1}{4} \{S_Z(f) + S_{Z^*}(-f)\} \\ S_{YX}(f) = -S_{XY}(f) = \frac{1}{4j} \{S_Z(f) + S_{Z^*}(-f)\} \end{cases} \Rightarrow$$

و چون $S_Z(f)$ حقیقی است پس این همان رابطه (۲) است.

* اثبات ۳:

$$\begin{cases} R_Z(t + \tau, t) = R_X(t + \tau, t) + R_Y(t + \tau, t) + j[R_{YX}(t + \tau, t) + R_{XY}(t + \tau, t)] \\ m_Z(t) = m_X(t) + jm_Y(t) \end{cases}$$

از دو رابطه بالا و با توجه به خاصیت (۱) خاصیت (۳) استنتاج می گردد.

۵-۲) نمایش فازوری یک تابع:

ابتدا مولفه فرکانس حقیقی را در نظر می گیریم:

$$X(t) = r \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \text{Re}[\underbrace{re^{j(\pi f_0 t + \phi)}}_{z(t)}]$$

$$X(t) = \text{Re}[z(t)] \quad z(t) = re^{j(2\pi f_0 t + \phi)} = r \cos(2\pi f_0 t + \phi) + jr \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$X(t) = \text{Re}[z(t)] \quad \text{تابع پایین گذر متناظر} = X_I(t) = re^{j\phi}$$

$$Z(f) = X(f) \cdot 2U(f)$$

$$X_I(f) = Z(f + f_0)$$

با مقایسه ملاحظه می گردد که:

$$2U(f) \xleftarrow{f} \delta(t) + j \frac{1}{\pi t}$$

$$\Rightarrow z(t) = X(t) * [\delta(t) + j \frac{1}{\pi t}] = X(t) + j\check{X}(t)$$

تبدیل هیلبرت $X(t)$: $\check{X}(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t}$ جزء مجازی سیگنال تحلیلی متناظر

$$X_l(t) = z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

- می توان در سیستم های خطی بجای ورودی حقیقی تابع تحلیلی متناظر آنرا در نظر گرفت. در اینصورت طبق قضیه جمع آثار پاسخ سیستم در هر نقطه جزء حقیقی پاسخ به ورودی تحلیلی متناظر خواهد بود و علت استفاده از تحلیلی متناظر، ساده تر بودن آن از نظر ریاضی است. ضمناً در مواردی که سیگنال میانگذر با فرکانس میانی بالا ولی عرض باند کم می باشد می توان از فازور (در سیستم LTI) بجای سیگنالها استفاده کرد که سرعت تغییرات آن خیلی کمتر از سیگنال اصلی می باشد و لذا کار کردن با آن (نمونه برداری، شبیه سازی و ...) خیلی ساده تر است.

۵-۳) نمایش فازوری یک فرآیند:

فرآیند تحلیلی متناظر $X(t) \rightarrow \boxed{H(f) = 2U(f)} \rightarrow z(t) = X(t) + j\check{X}(t)$ حقیقی

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{j\pi t}$$

مدل های مناسب برای بخاطر سپردن روابط فرآیند $X(t)$ با فرآیند تحلیلی متناظر و فازور متناظر (و یا شبیه سازی آنها):

$$X(t) \rightarrow \begin{matrix} H(f) = 2U(f) \\ h(t) = \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \end{matrix} \xrightarrow{z(t) = X(t) + j\check{X}(t)} \begin{matrix} \otimes \\ \uparrow \\ e^{-j2\pi f_0 t} \end{matrix} \rightarrow X_l(t) = X_i(t) + jX_q(t)$$

$$X_i(t), X_q(t) \rightarrow \begin{matrix} \otimes \\ \uparrow \\ e^{-j2\pi f_0 t} \end{matrix} \rightarrow \check{X}(t), X(t)$$

$$X_l(t) = X_i(t) + jX_q(t)$$

$$X_i(t) + jX_q(t) = (X(t) + j\tilde{X}(t))e^{-j2\pi f_0 t} \Rightarrow \begin{cases} X_i(t) = X(t) \cos 2\pi f_0 t + \tilde{X}(t) \sin 2\pi f_0 t \\ X_q(t) = \tilde{X}(t) \cos 2\pi f_0 t - X(t) \sin 2\pi f_0 t \end{cases}$$

فرض می کنیم $S_x(0) \neq \infty$ (فرآیند میانگذر):

* برخی از خواص $X_i(t), z(t)$:

۱) فرآیندهای تحلیلی متناظر $z(t)$ و پایین گذر متناظر $X_i(t)$ (فازور) عمود بر مزدوجند.

* اثبات ۱:

$$R_{zz^*}(t_1, t_2) = 0 \text{ باید ثابت کنیم}$$

$$\begin{aligned} S_{zz^*}(f) &= 2U(f)S_x(f) \cdot [2U(-f)]^* \\ &= 4U(f)U(-f)S_x(f) = 0 \end{aligned}$$

$$S_{zz^*}(f) = 0 \Rightarrow \langle R_{zz^*}(t + \tau, t) \rangle = 0$$

از طرفی $X(t)$ حقیقی و سیستمهای LTI فوق خروجی های توأم ساکن می دهد یعنی z, z^* توأم ساکن هستند پس متوسط زمانی را می توان برداشت:

$$R_{zz^*}(t + \tau, t) = 0 \Rightarrow Z(\cdot) \perp Z^*(\cdot)$$

و برای اثبات تعامد بر مزدوج $X_i(t)$:

$$R_{X_i X_i^*}(t_1, t_2) = EX_i(t_1)X_i(t_2) = Ez(t_1)e^{-j2\pi f_0 t_1} - z(t_2)e^{-j2\pi f_0 t_2} = Ez(t_1)z(t_2)e^{-j2\pi f_0(t_1+t_2)} = 0$$

چون $X_i(t), z(t)$ عمود بر مزدوجند پس می توان از خواص عمود بر مزدوج بودن آنها استفاده کرد:

توأم ساکن $z(t) \Rightarrow X(t), \tilde{X}(t)$ ساکن

توأم ساکن $X_i(t) \Rightarrow X_q(t), X_i(t)$ ساکن

و ضمناً می توان طیف قدرت توأم و تک تک $X_q(t), X_i(t)$ را براحتی حساب کرد.

$$S_z(f) = S_x(f) \cdot |2U(f)|^2 = \begin{cases} 4S_x(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

از روی تابع همبستگی ثابت می گردد:

$$S_{\bar{X}}(f) = S_X(f) \quad : \quad S_{x_i}(f) = S_z(f + f_0)$$

$$S_{X_i}(f) = S_{X_q}(f) = \frac{1}{4} [S_{X_i}(f) + S_{X_i}(-f)]$$

$$S_{X_i X_q}(f) = S_{X_q X_i}(f) = \frac{1}{4j} [S_{X_i}(f) - S_{X_i}(-f)]$$

$$\left. \begin{array}{l} S_X(\cdot) \neq \infty \\ X(t) dWSS \end{array} \right\} \Rightarrow m_x(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_z(t) = 0 \Leftrightarrow m_{\bar{X}}(t) = 0 \\ m_{x_i}(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_{X_i}(t) = 0 \\ m_{X_q}(t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

۲) در حالت کلی متغیرهای تصادفی $X_q(t), X_i(t)$ متعامد و ناهمبسته-

$$\text{اند. } (R_{X_q X_i}(\cdot) = C_{X_q X_i}(\cdot) = 0)$$

و اگر فرایند $X(t)$ در ناحیه $f > 0$ در حول f_0 تقارن زوج داشته باشد فرایندهای تصادفی X_q, X_i متعامد و ناهمبسته خواهند بود.

$$R_{X_q X_i}(t_1, t_2) = C_{X_q X_i}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$$

بدلیل صفر بودن متوسط تعامد و ناهمبستگی معادلند.

$$\begin{aligned} R_{X_q X_i}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_q X_i}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4j} (S_{X_i}(f) - S_{X_i}(-f)) df = \frac{1}{4j} \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_i}(f) df \\ &= \frac{1}{4j} \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_i}(-f) df = 0 \Rightarrow X_q(t) \perp X_i(t) \end{aligned}$$

۳) اگر $X(t)$ نرمال باشد در اینصورت $X(t)$ و $\bar{X}(t)$ و $X_i(t)$ و $X_q(t)$ تواما نرمال خواهند بود.

(چون $\bar{X}(t)$ و $X_i(t)$ و $X_q(t)$ همگی رابطه خطی تابع زمان با $X(t)$ دارند) در اینصورت طبق خاصیت قبل می توان گفت که در حالت کلی اجزای حقیقی و مجازی فazor معادل فرآیند میان گذر ساکن در هر لحظه مستقل از هم می باشند و در صورت وجود تقارن در $S_X(f)$ فرایندهای $X_q(t)$ و $X_i(t)$ مستقل از هم می گردند.

$$X_i(\cdot) \parallel X_q(\cdot)$$