مبحث چهارم MR Signal Characteristics :

۱ – در یک نگاه کلی سیگنال‌های MRI سه دسته‌اند: $\left.\begin{array}{r} Free\,induction\,decay: FID \\ RF\ echo \\ Gradient\,echo \end{array}\right\}$

فرضیات:

۱- پالس‌های RF را به منزله عملگرهای لحظه‌ای فرض می‌کنیم.

۲- حساسیت کویل گیرنده و شدت میدان الکترومغناطیسی B_1 (کویل فرستنده) را در همه نقاط یکسان فرض می‌کنیم.

۳- تابع چگالی طیفی اسپین $\rho(\omega)$ را معرفی می‌کنیم که $\rho(\omega)$ در واقع معرف دامنه مغناطیس شدگی ایزوکرومات متناظر با ω است.

$$dM(\omega) = \rho(\omega)d\omega \qquad M = \int \rho(\omega)d\omega$$

$$s(t) = \int_{object} M_{xy}(r,0)\,\cancel{B_r(r)}\,e^{-t/T_2}.e^{-i\omega(r)t}dr$$

$$ds(t) = \rho(\omega)e^{-t/T_2}.e^{-i\omega t}$$

$$s(t) = \int \rho(\omega)e^{-t/T_2}.e^{-i\omega t}d\omega$$

اگر از میرایی T_2 صرفنظر کنیم

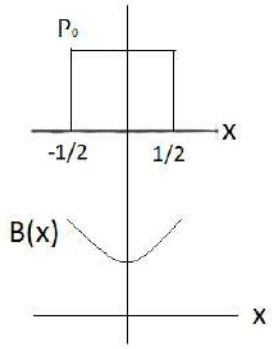
$$s(t) = \int \rho(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

اگر یک سیستم اسپین شامل N ایزوکرمات در فرکانس‌های $\omega_1,\ldots,\omega_N$ باشد که دامنه هر کدام $M^0_{z,n}$ است.

$$\rho(\omega) = \sum_{n=1}^{N} M^0_{z,n}.\delta(\omega-\omega_n)$$

مثال: اگر چگالی اسپین یک جسم با تابع $C(x) = \rho_0 \Pi(x)$ بیان شده باشد و این جسم در یک میدان نا همگن با رابطه $B(x) = B_0 + x^2$ قرار گیرد $\rho(\omega)$.را برای این جسم محاسبه کنید.

$$s(t)=\int \rho_0 \prod(x) e^{-t/T_2}.e^{-i\omega(x)t}dx$$



$$\omega(x)=\gamma.B(x)=\gamma.(B_0+x^2)$$

$$s(t)=\int_{-1/2}^{1/2} \rho_0.e^{-t/T_2}.e^{-i\gamma.(B_0+x^2)t}dx$$

تغییر متغیر:

$$\left.\begin{array}{ll} \omega \triangleq \gamma.(B_0+x^2) & d\omega=2\gamma.xdx \\ x=\sqrt{\dfrac{(\omega-\omega_0)}{\gamma}} & \end{array}\right\} \Rightarrow dx=\frac{d\omega}{2\sqrt{(\omega-\omega_0)\gamma}}$$

$$s(t)=\int_{\gamma B_0}^{\gamma B_0+\frac{\gamma}{4}} 2\rho_0.e^{-t/T_2}.e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{z\sqrt{(\omega-\omega_0)\gamma}} \Rightarrow \rho(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{\sqrt{(\omega-\omega_0)\gamma}} & \omega_0<\omega<\omega_0+\dfrac{\gamma}{4} \\ 0 & O.W.\end{cases}$$

سیگنال FID (Free Induction Decays)

Free : حاصل از precession Free

Induction : سیگنال اندازه‌گیری شده ناشی از القای الکترومغناطیسی

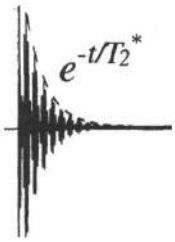
Decay : میرایی

در حالت ساده که فقط یک ایزوکرومات داشته باشیم: $\rho(\omega)=M_z^0\delta(\omega-\omega_0)$

بعد از یک پالس تحریک α درجه: $s(t)=M_z^0\sin\alpha.e^{-t/T_2}.e^{-i\omega_0 t}$

فرمول FID در حالت کلی:

$$s(t)=\sin(\alpha).\int \rho(\omega).e^{-t/T_2}.e^{-i\omega t}d\omega$$



نرخ میرایی سیگنال دیگر T_2 نیست و T_2^* خواهد بود.

$T_2^*: effective T_2 \qquad T_2^*<T_2$

مثال: در حالت خاص که ناهمگنی میدان مغناطیسی فرم لورنتزین داشته باشد T_2^* را محاسبه کنید:

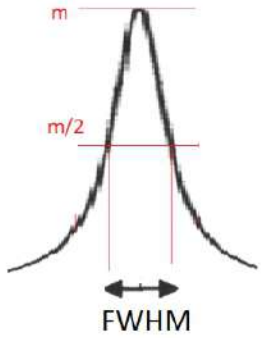
ناهمگنی دارای توزیع لورنتزین $\Rightarrow \rho(\omega) = M_z^0 . \dfrac{(\gamma.\Delta B_0)^2}{(\gamma.\Delta B_0)^2 + (\omega - \omega_0)^2}$

$$s(t) = \sin(\alpha).M_z^0.e^{-t/T_2} \int \frac{(\gamma.\Delta B_0)^2}{(\gamma.\Delta B_0)^2 + (\omega-\omega_0)^2}.e^{-i\omega t} d\omega \qquad \frac{2a}{a^2+\omega^2} \rightarrow e^{-a|t|} B_1^e(t)$$

$$= \sin(\alpha).M_z^0.e^{-t/T_2}.e^{-i\omega_0 t} \int \frac{(\gamma.\Delta B_0)^2}{(\gamma.\Delta B_0)^2 + \omega'^2}.e^{-i\omega' t} d\omega'$$

$$s(t) = M_z^0.\sin(\alpha).e^{-t/T_2}.e^{-i\omega_0 t}.(\pi.\gamma.\Delta B_0).e^{\gamma.\Delta B_0 t} \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow s(t) = A.e^{-t/T_2^*}.e^{-i\omega_0 t} \qquad \Rightarrow \frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \gamma.\Delta B_0$$



توزیع لورنتزین:

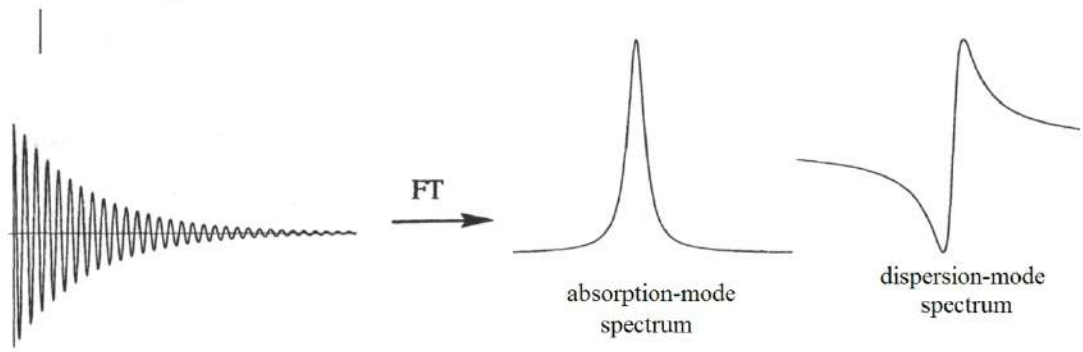
$$FWHM:\ Full\ width\ at\ Half\ Maximum = \Gamma \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{0.5\Gamma}{(x-m)^2 + (0.5\Gamma)^2}$$

طیف سیگنال FID :

در ساده ترین حالت (وجود یک ایزوکرومات):

$$s(t) = M_z^0 \sin\alpha.e^{-t/T_2}.e^{-i\omega_0 t} \xleftrightarrow[F]{} \hat{s}(\omega) \rightarrow \begin{cases} absorption\bmod e: \mathrm{Re}(\hat{s}(\omega)) = \dfrac{AT_2}{1+T_2^2(\omega+\omega_0)^2} \\ dispersion\bmod e: \mathrm{Im}(\hat{s}(\omega)) = \dfrac{AT_2^2(\omega+\omega_0)^2}{1+(\omega+\omega_0)^2 T_2} \end{cases}$$

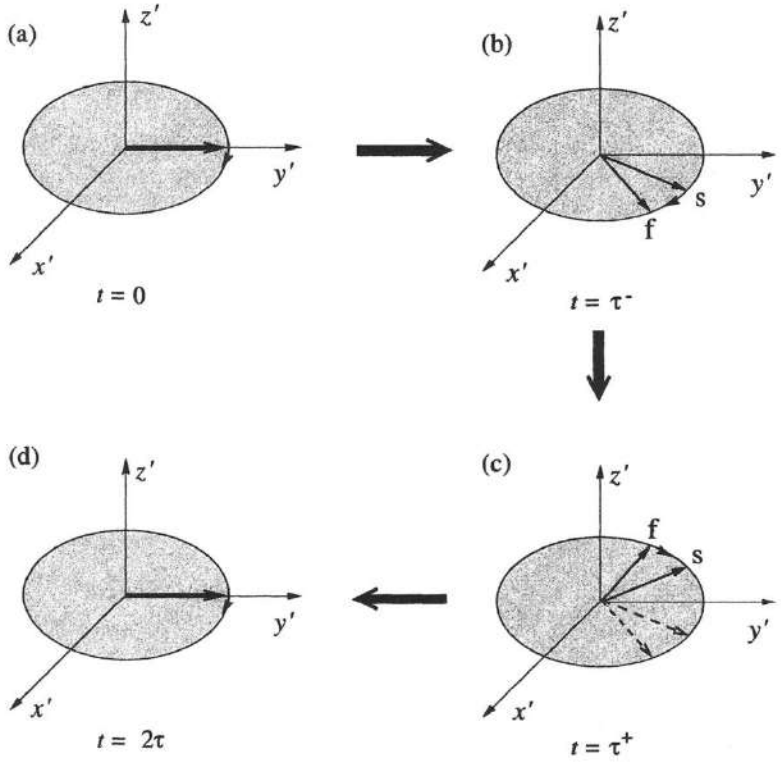
$$FWHM = \frac{1}{\pi T_2}$$



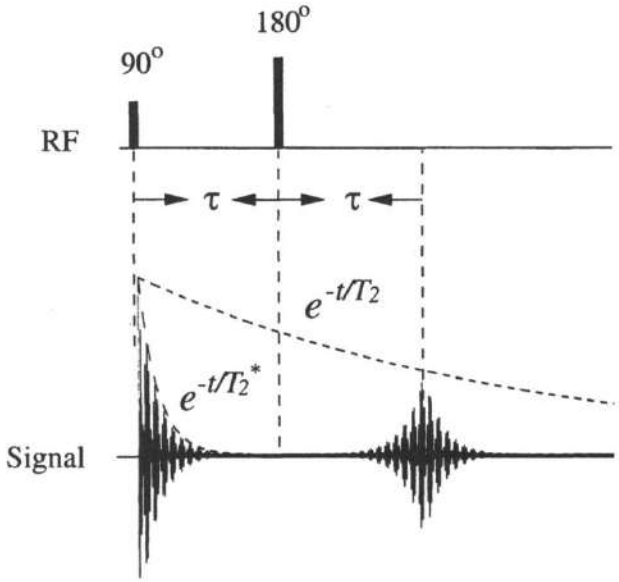
اکوهای RF (RF echos)

۱-اکوی حاصل از دو پالس RF :

- جسم را فقط شامل دو ایزوکرومات فرض می‌کنیم (ω_s, ω_f) , $\omega_f > \omega_s$



رشته پالس بکار گرفته شده: $90_{x'} - \tau - 180_{y'}$



معادلات سیگنال حاصل از دو پالس RF:

رشته پالس مورد استفاده: $\alpha_1 y' - \tau_1 - \alpha_{2y'}$

$$t=0^-:\begin{bmatrix}0\\0\\M_z^0(\omega)\end{bmatrix} \quad , \quad t=0^+:\begin{bmatrix}M_{x'}(\omega,0^+)\\M_{y'}(\omega,0^+)\\M_{z'}(\omega,0^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & 0 & -\sin\alpha_1\\0 & 1 & 0\\\sin\alpha_1 & 0 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\M_z^0(\omega)\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}M_{x'}(\omega,0^+)=-M_z^0(\omega).\sin\alpha_1\\M_{y'}(\omega,0^+)=0\\M_{z'}(\omega,0^+)=M_z^0(\omega).\cos\alpha_1\end{cases}$$

$$t=\tau_1^-:\begin{cases}M_{x'}(\omega,\tau_1^-)=-M_z^0(\omega).\sin\alpha_1.e^{-\tau_1/T_2}.\cos\omega\tau_1\\M_{y'}(\omega,\tau_1^-)=-M_z^0(\omega).\sin\alpha_1.e^{-\tau_1/T_2}.\sin\omega\tau_1\\M_{z'}(\omega,\tau_1^-)=-M_z^0(\omega)[1-(1-\cos\alpha_1)e^{-\tau_1/T_1}]\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}M_{x'}(\omega,\mathrm{t})=\mathrm{Re}(\mathrm{M}_{\mathrm{x'y'}}(\omega,\mathrm{t}))\\M_{y'}(\omega,\mathrm{t})=\mathrm{Im}(\mathrm{M}_{\mathrm{x'y'}}(\omega,\mathrm{t}))\end{cases}$$

$$\begin{cases}M_{x'y'}(\omega,t)=\mathrm{M}_{\mathrm{x'y'}}(\omega,0^+)e^{-\tau_1/T_2}e^{-i\omega t}\\M_{z'}(\omega,t)=M_z^0(\omega)+[M_z^0(\omega)\cos\alpha_1-M_z^0(\omega)].e^{-\tau_1/T_1}\end{cases} \quad 0^+<t<\tau_1$$

$$t=\tau_1^+:\begin{bmatrix}M_{x'}(\omega,\tau_1^+)\\M_{y'}(\omega,\tau_1^+)\\M_{z'}(\omega,\tau_1^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2\\0 & 1 & 0\\\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}M_{x'}(\omega,\tau_1^-)\\M_{y'}(\omega,\tau_1^-)\\M_{z'}(\omega,\tau_1^-)\end{bmatrix}$$

$$M_{x'y'}(\omega,\tau_1^+)=M_z^0(\omega).\sin\alpha_1.e^{-\tau_1/T_2}.[\sin^2\frac{\alpha_2}{2}.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_1}-\cos^2\frac{\alpha_2}{2}.\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1}]$$
$$-M_z^0(\omega).[1-(1-\cos\alpha_1).e^{-\tau_1/T_1}].\sin\alpha_2$$

$$t>\tau_1^+:\ M_{x'y'}(\omega,t)=M_z^0(\omega).\sin\alpha_1.e^{-t/T_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.[\sin^2\frac{\alpha_2}{2}-\cos^2\frac{\alpha_2}{2}]$$
$$-M_z^0(\omega)\sin\alpha_2 e^{\frac{t-\tau_1}{T_2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\tau_1)}[1-(1-\cos\alpha_1).e^{-\tau_1/T_1}]$$

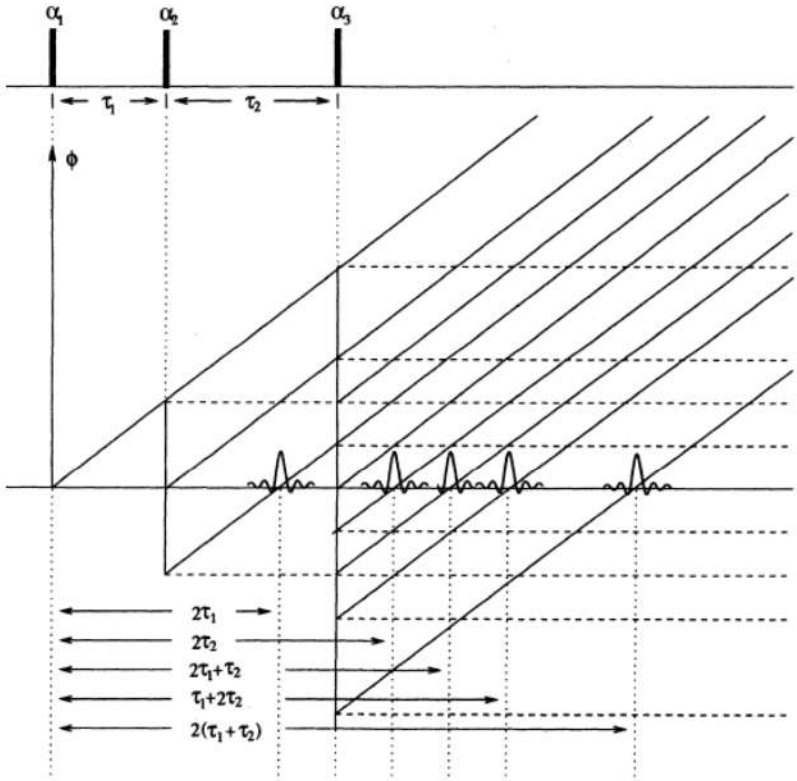
$$M_{x'y'}(\omega,t)=M_z^0(\omega).\sin\alpha_1.e^{-t/T_2}\sin^2\frac{\alpha_2}{2}\mathrm{e}^{\boxed{-\mathrm{i}\omega(t-2\tau)}}-M_z^0(\omega).\sin\alpha_1.e^{-t/T_2}\cos^2\frac{\alpha_2}{2}\mathrm{e}^{\boxed{-\mathrm{i}\omega t}}+term3$$

تنها جز اول معادله بالا (جزئی که دارای زاویه فاز $e^{-i\omega(t-2\tau)}$ است) برای تمامی ایزوکرومات‌ها در لحظه $TE = t = 2\tau$ (Echo time) دارای فاز صفر خواهد بود که عامل تشکیل سیگنال اسپین اکو است.

$$s(t) = \int \sin\alpha_1 . e^{-t/T_2(\omega)} \sin^2\frac{\alpha_2}{2} e^{-i\omega(t-TE)} \rho(\omega) d\omega$$

$S(TE)$ = دامنه اکو

۲-اکوهای حاصل از سه پالس RF :



برای یک پالس $\alpha_{y'}$

$$\begin{bmatrix} M_{x'}^{+} \\ M_{y'}^{+} \\ M_{z'}^{+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x'}^{-} \\ M_{y'}^{-} \\ M_{z'}^{-} \end{bmatrix}$$

$$M_{x'y'} \triangleq M_{x'} + iM_{y'}$$

$$\begin{cases} M_{x'y'}^{+} = M_{x'y'} \cos^2\frac{\alpha}{2} - M_{x'y'}^{*} \sin^2\frac{\alpha}{2} - M_{z'} \sin\alpha \\ M_{z'}^{+} = M_{z'} \cos\alpha + \frac{1}{2}[M_{x'y'} + M_{x'y'}^{*}] \sin\alpha \end{cases}$$

در صفحه افقی:

۱- یک بخش از دست نخورده باقیمانده است. $M_{x'y'}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

۲- یک بخش از یک پالس عقربه کرده است. $-M^*_{x'y'}\sin^2\frac{\alpha}{2}$

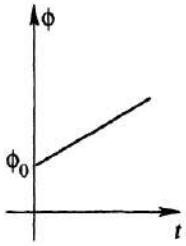
۳- یک بخش از به صفحه افقی منتقل شده است. $-M_{z'}\sin\alpha$

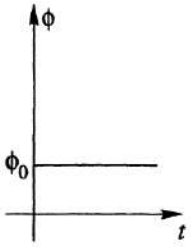
روی محور عمودی:

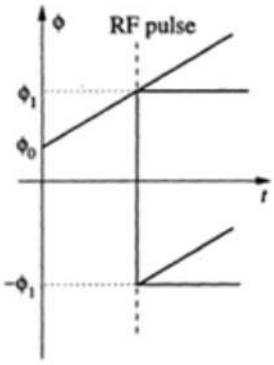
۱- یک بخش از دست نخورده باقیمانده است. $M_{z'}\cos\alpha$

۲- دو بخش از صفحه افقی در راستای محور عمودی قرار می گیرند. $\frac{1}{2}[M_{x'y'}+M^*_{x'y'}]\sin\alpha$

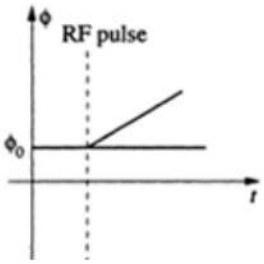
یک مولفه افقی را با یک خط مایل نشان می دهیم. یک مولفه عمودی را با یک خط راست نشان می دهیم.







$$M_{x'y'} \xrightarrow{\alpha_{y'}} \begin{cases} \begin{cases} M_{x'y'}\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ -M^*_{x'y'}\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{cases} & \text{جزء مولفه عرضی} \\ \begin{cases} \frac{1}{2}M_{x'y'}\sin\alpha \\ \frac{1}{2}M^*_{x'y'}\sin\alpha \end{cases} & \text{روی مولفه طولی قرار دارند} \end{cases}$$



$$M_{z'} \xrightarrow{\alpha_{y'}} \begin{cases} -M_{z'}\sin\alpha & \text{در صفحه افقی قرار گرفته است:} \\ -M_{z'}\cos\alpha & \text{روی محور عمودی باقی می ماند:} \end{cases}$$

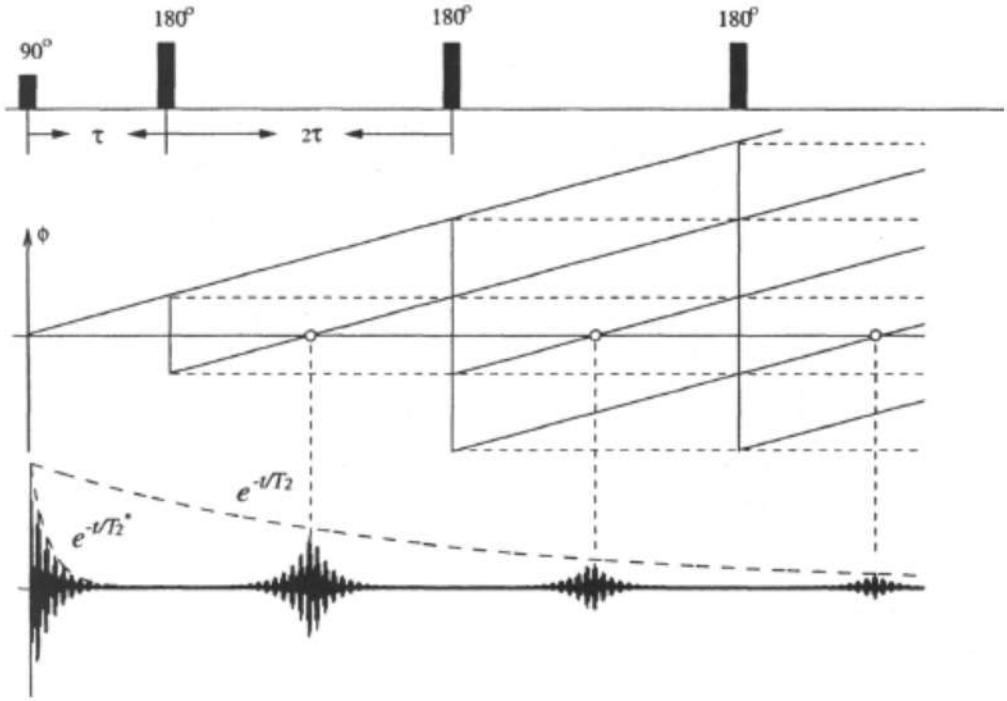
محاسبه تعداد اکوهای RF با استفاده از EPG :

- تعداد خطوط مایل در EPG بعد از n-1 امین پالس RF : T_{n-1} (بعد از اعمال n امین پالس RF، $2T_{n-1}$ خط مایل و $2T_{n-1}$ خط افقی تولید می‌کند.)
- تعداد خطوط افقی در EPG بعد از n-1 امین پالس RF: H_{n-1} (بعد از اعمال n امین پالس RF، H_{n-1} خط افقی و H_{n-1} خط مایل تولید می‌کند.)

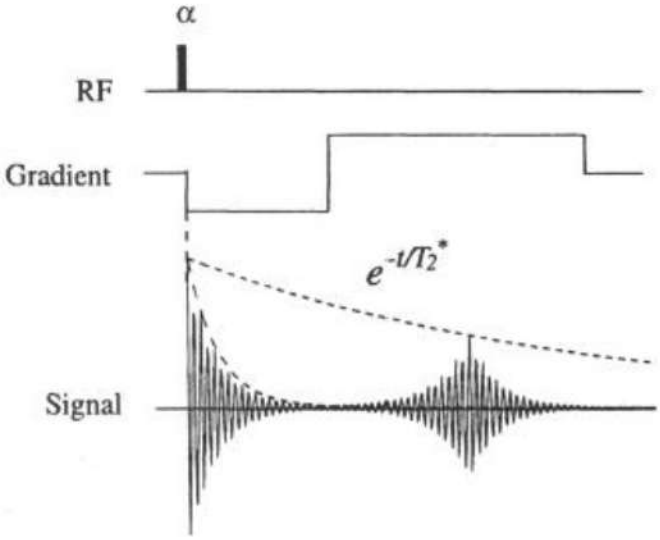
$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + H_{n-1} \\ H_n = 2T_{n-1} + H_{n-1} \end{cases} \Rightarrow T_n = 3^{n-1} - 1 \quad , \quad \begin{cases} T_1 = 1 \\ H_1 = 1 \end{cases}$$ شرایط اولیه:

- تعداد اکو های حاصل از n امین پالس RF: $N_E(n) = \dfrac{3^{n-1} - 1}{2}$
- ماکزیمم تعداد اکو حاصل از n پالس N=rf $N = \sum_{i=1}^{n} N_E(i) = \frac{1}{2}[\frac{3^n - 1}{2} - n]$

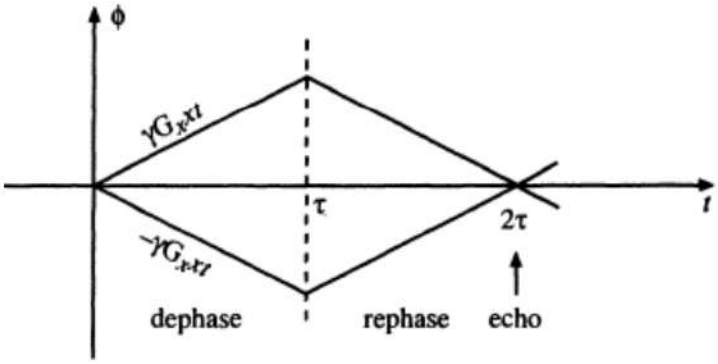
قطار اکوی CPMG (Carr-Pureell-Meiboo-Gill)



اکوی گرادیان:



$$T_2^{**} \ll T_2^*$$
$$\phi(x,t) = -\gamma G_x.x$$
$$B(x) = B_0 + (-G_x.x)$$
$$\omega = \gamma B$$
$$\omega(x) = \gamma B_0 - \gamma G_x.x$$

در مختصات دوار:

$$\omega(x) = -\gamma G_x.x$$
$$\begin{cases} \phi(x,t) = -\gamma G_x.x.t & 0 < t < \tau_p \\ \phi(x,t) = -\gamma G_x.x.\tau_p + \gamma G_x.x.(t-\tau_p) & t > \tau_p \end{cases}$$