

مبحث دوم: تولید و آشکارسازی سیگنال تصویرگری تشید مغناطیسی (MR)

MRI ناشی از پدیده تشید مغناطیسی است که مربوط به هسته اتم می‌باشد.

برای توصیف ذرات اتم، از مکانیک کوانتمی استفاده می‌شود، اما از آنجاییکه MRI حاصل رفتار جمعی این ذرات است یک توصیف فیزیک کلاسیک برای آن کافی می‌باشد.

اتم شامل الکترون (بار منفی) و هسته می‌باشد که هسته نیز شامل پروتون (بار مثبت) و نوترون (خنثی) است.

هسته بعضی از اتم‌ها که دارای عدد اتمی فرد و یا عدد جرمی فرد می‌باشند، دارای خاصیتی به نام اسپین هستند. اسپین هسته را می‌توان از دیدگاه فیزیک کلاسیک معادل چرخش آن به دور خود دانست.

J: اندازه حرکت μ : ضریب ژیرومغناطیسی (rad/Tesla-sec)

$$\gamma = \frac{h}{2\pi} \quad |\mu| = \gamma \hbar \sqrt{I(I+1)} \quad Tesla = \frac{N}{A.m} \quad \vec{\mu} = \gamma \vec{j}$$

I: عدد کوانتمی اسپین (spin quantum number) یک عدد صحیح یا نصف یک عدد صحیح است و هر اتم با یک عدد کوانتمی اسپین مشخص می‌شود.
 $I = 0, 1, 1/2, 2, 3/2, \dots$

مثال: اتم هیدروژن یک الکترون و یک پروتون دارد و اصلاً نوترون ندارد. این اتم دارای عدد کوانتمی اسپین $I=1/2$ است و ضریب ژیرومغناطیسی آن برابر است با:

$$\gamma = 2\pi \times 2.58 \times 10^6 \text{ rad/sec.Tesla}$$

مقدار I برای هسته‌های مختلف:

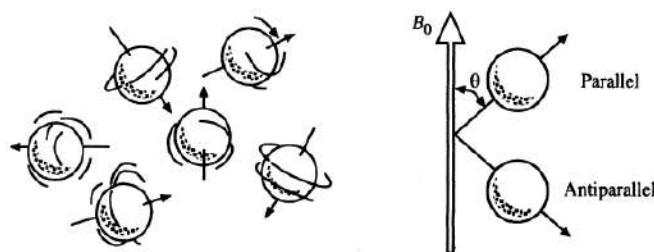
۱- هسته‌هایی که دارای عدد جرمی فرد هستند: I نصف عدد طبیعی است \leftarrow
 $\begin{cases} \text{عدد اتمی زوج} \\ \text{عدد اتمی فرد} \end{cases}$

۲- هسته‌هایی که دارای عدد جرمی زوج هستند: I عدد طبیعی است \leftarrow
 $\begin{cases} \text{عدد اتمی زوج} \\ \text{عدد اتمی فرد} \end{cases} \leftarrow I=0$

به هسته‌هایی که دارای $I \neq 0$ هستند NMR-active گفته می‌شود و می‌توانند خاصیت تشید مغناطیسی از خود بروز دهند.

در حالت تعادل حرارتی و عدم وجود میدان خارجی، برآیند ممان‌های مغناطیسی میکروسکوپیک، صفر است.

قرار دادن جسم در میدان خارجی (میدان مغناطیسی ساکن)



با قرار دادن جسمی با عدد کوانتومی اسپین I در میدان مغناطیسی ثابت B_0 هر یک از اسپین‌های جسم در یکی از $2I+1$ حالت کوانتومی قرار می‌گیرد و معادلات حرکت آن به صورت زیر است:

$$m_I = -I, -I+1, \dots, I \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \hat{k} \quad \omega_0 = \gamma B_0$$

$$\mu_x = |\vec{\mu}_{xy}| \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad |\vec{\mu}_{xy}| = \gamma \hbar \sqrt{I(I+1) - m_I^2}$$

$$\mu_y = |\vec{\mu}_{xy}| \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \varphi \sim \cup [0, 2\pi] \quad \text{متغیر تصادفی یکنواخت}$$

$$\mu_z = \gamma m_I \hbar$$

توصیف نحوه حرکت ممان مغناطیسی میکروسکوپیک در میدان خارجی

فرض: از برهم کنش‌های مختلف بر همدیگر صرف نظر می‌کنیم.

\vec{B}

$\vec{\mu}$

$\begin{cases} \mu_x(0) = \mu_{x_0} \\ \mu_y(0) = \mu_{y_0} \\ \mu_z(0) = \mu_{z_0} \end{cases} \quad \vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad : \text{گشتاوری که میدان } B \text{ به } \mu \text{ وارد می‌کند.}$

$$= I \cdot \alpha = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} I \cdot \omega = \frac{dj}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} \\ \vec{\mu} = \gamma \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{B}$$

α : شتاب زاویه ای I : اینرسی دورانی

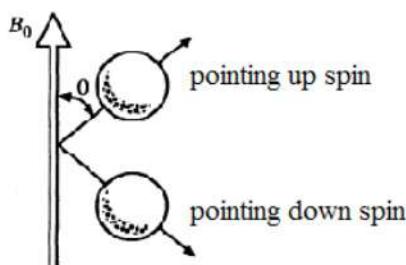
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \hat{k} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} \quad \vec{\mu} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = B_0 (\mu_j \vec{i} - \mu_x \vec{j})$$

$$\begin{cases} \frac{d\mu_x}{dt} = \gamma B_0 \mu_y \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -(\gamma B_0) \mu_x \\ \frac{d\mu_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \mu_x}{dt^2} = -(\gamma B_0)^2 \mu_x \\ \mu_x(0) = \\ \frac{d\mu_x}{dt}(0) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_x(t) = \mu_{x_0} \cos \omega_0 t + \mu_{y_0} \sin \omega_0 t \\ \mu_y(t) = \mu_{y_0} \cos \omega_0 t - \mu_{x_0} \sin \omega_0 t \\ \mu_z(t) = \mu_{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{xy} = \mu_x + i \mu_y \\ \mu_{xy}(t) = \mu_{xy}(0) e^{-i\gamma B_0 t} \\ \mu_z(t) = \mu_{z_0} \end{cases}$$

جهت چرخش از قانون انگشتان دست چپ پیروی می کند.

مثال : با قرارگرفتن جسم حاوی هیدروژن در میدان خارجی، اسپین‌ها در دو وضعیت کوانتومی قرار می‌گیرند.



$$\cos \theta = \frac{\mu_z}{|\mu|} = \frac{m_I}{\sqrt{I(I+1)}} \quad \theta = 54.4^\circ$$

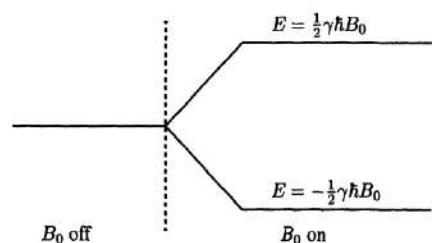
سطوح انرژی کوانتومی و Zeeman splitting effect

متناظر با هر یک از وضعیت هر اسپین‌ها (در حضور میدان خارجی) می‌توان یک سطح انرژی کوانتومی تعریف کرد.

تأثیر میدان مغناطیسی خارجی که باعث قرارگرفتن اسپین‌ها (هسته‌ها) در هریک از $2I+1$ سطح انرژی می‌شود را Zeeman splitting effect می‌گویند.

برای اتم هیدروژن داریم:

$$\text{انرژی} \left\{ \begin{array}{l} E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ \vec{B} = B_0 \vec{k} \end{array} \right. \Rightarrow E = -\mu_z B_0 = -\gamma m_I \hbar B_0$$



$$\begin{cases} \text{pointing up spins: } m_I = \frac{1}{2} \Rightarrow E \uparrow = -\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \\ \text{pointing down spins: } m_I = -\frac{1}{2} \Rightarrow E \downarrow = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \end{cases} \Rightarrow \Delta E = E \downarrow - E \uparrow = \gamma \hbar B_0$$

مغناطیس شدگی برآیند Bulk magnetization

بدون ازدست دادن کلیت، ادامه بحث را برای یک سیستم ایمنی با $I=1/2$ (مشابه هیدروژن) مطرح می‌کنیم.

N^{\uparrow} : Number of pointing up spins

N^{\downarrow} : Number of pointing up spins

N_s : total of spins in the object

T_s : absolute temperature of the spin system

K : Boltzmann constant ($1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)

$$\begin{cases} N^{\uparrow} + N^{\downarrow} = N_s \\ \frac{N^{\uparrow}}{N^{\downarrow}} = e^{\frac{\Delta E}{kT_s}} \end{cases} \xrightarrow{\Delta E \ll kT_s} \frac{N^{\uparrow}}{N^{\downarrow}} = 1 + \frac{\Delta E}{kT_s} \Rightarrow N^{\uparrow} - N^{\downarrow} = N_s \frac{\gamma \hbar B_0}{2kT_s}$$

M: (bulk magnetization) برآیند ممان‌های مغناطیسی میکروسکوپیک

μ_n ممان‌های میکروسکوپیک $N=1,2,\dots,N_s$

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^{N_s} \vec{\mu}_n = (\underbrace{\sum \mu_{x,n}}_{\approx 0}) \vec{i} + (\underbrace{\sum \mu_{y,n}}_{\approx 0}) \vec{j} + (\sum \mu_{z,n}) \vec{k}$$

$$\vec{M} = \left[\sum_{n=1}^{N_s} \frac{\gamma \hbar}{2} + \sum_{n=1}^{N_s} \left(-\frac{\gamma \hbar}{2} \right) \right] \vec{k} = \frac{\gamma \hbar}{2} (N^{\uparrow} - N^{\downarrow})$$

$$\vec{M} = \frac{(\gamma \hbar)^2 N_s B_0}{4kT_s} \vec{k}$$

می‌توان با تعمیم رابطه فوق، M را برای یک سیستم اسپینی با عدد کوانتومی اسپین I به صورت زیر نوشت:

$$\vec{M} = \frac{(\gamma \hbar)^2 N_s B_0 I(I+1)}{3kT_s}$$

سه عامل قابل کنترل برای دامنه M :

(۱) شدت میدان B_0 ,

(۲) N_s : جمیت هسته‌ها

(۳) دما

مثال: اختلاف جمعیت نسبی دو سطح انرژی را برای یک سیستم اسپینی با $I=2$ (هیدروژن) برای میدان یک تولا در دمای اتاق ($T_s=300\text{ K}$) محاسبه کنید.

$$\gamma = 2\pi \times 42.58 \times 10^6 \text{ Hz/T} \quad \hbar = 6.6 \times 10^{-34} / 2\pi \quad \text{برای هیدروژن:}$$

$$\begin{cases} \frac{N\uparrow}{N\downarrow} = e^{\frac{-\gamma\hbar B_0}{kT_s}} \\ k = 1.38 \times 10^{-23} \end{cases}, \quad \frac{N\uparrow - N\downarrow}{N_s} = \frac{\gamma\hbar B_0}{2kT_s} \Rightarrow \frac{\Delta N}{N_s} = 3 \times 10^{-6}$$

مسئله: اگر اندازه یک واکسل $2 \times 2 \times 5 \text{ mm}^3$ باشد و این واکسل را شامل آب فرض کنیم، در شدت میدان 1.5 T و در دمای اتاق اختلاف جمعیت دو سطح انرژی کوانتمی چقدر است؟

جواب: هر مول آب 18 گرم است که شامل 6.02×10^{23} مولکول آب است و چگالی آب 1 g/cm^3 می‌باشد

$$\Delta N = 6 \times 10^{15} \text{ پس:}$$

شرط رزونانس (تشید)

$$\text{RF} : E_{rf} = \hbar\nu = \hbar\omega_{rf} \rightarrow \begin{cases} \hbar\omega_{rf} = \gamma\hbar B_0 & \text{معادله لارمور} \\ \omega_{rf} = \omega_0 = \gamma B_0 & \text{فرکانس تشید} \end{cases}$$

هدف از به کارگیری تحریک RF، آن است که حالت تعادل سیستم اسپینی به هم زده شود و ممان مغناطیسی برآیند از حالت تعادل خود خارج شود، لذا انرژی تشعشع RF باید برابر با اختلاف سطح انرژی کوانتمی باشد.

فرکانس لارمور

فرکانس چرخش اسپین‌ها در حضور میدان خارجی B_0 توسط رابطه $\omega_0 = \gamma B_0$ تعیین می‌شود. اما عواملی وجود دارند که باعث می‌شوند تمامی اسپین‌های یک سیستم (بافت) دارای یک فرکانس چرخش مساوی (و در نتیجه تشید مساوی) نباشند.

این عوامل عبارتند از:

- ۱) ناهمانگی میدان مغناطیسی B_0
- ۲) شیفت شیمیایی

شیفت شیمیایی

قرار گرفتن پروتون (هسته اتم هیدروژن) در مولکول‌های متفاوت (مثل آب، چربی، پروتئین و . . .) باعث قرار گرفتن محیط‌های شیمیایی (الکترون‌های) متفاوتی در اطراف آن می‌گردد. از آنجایی که این محیط‌ها به نوعی ایزولاسیون برای میدان B_0 ایجاد می‌کنند لذا میدان موثر دیده شده توسط پروتون با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{B}_0 = B_0(1 - \delta) \Rightarrow \Delta\omega = \gamma B_0 \delta \quad \text{شیفت شیمیایی}$$

شیفت شیمیایی می‌تواند مثبت و منفی باشد. برای مثال مقدار δ برای مولکول‌های چربی است. ۳.۳۵ ppm

$\Delta\omega$ به دو عامل بستگی دارد: δ و B_0

اگر ماکریزم مقدار شیفت فرکانس رزونانس در جسم مورد مطالعه ω_m باشد، باید تحریک RF دارای پهنه‌ای باند $|\omega_0 - \omega_m|$ باشد.

پالس RF، تحریک الکترومغناطیسی:

- میدان الکترومغناطیسی است که دارای فرکانس تشید و پوش ($B_1^e(t)$) است.

دو نوع مهم از پالس RF عبارتند از :

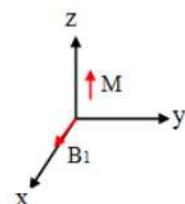
۱- پلاریزه خطی linearly polarized

۲- پلاریزه دایره‌ای circularly polarized

(۱) میدان پلاریزه خطی

$$B_1(t) = B_1^e(t) \cos(\omega_{rf}t + \varphi) \vec{i} - B_1^e(t) \sin(\omega_{rf}t + \varphi) \vec{j}$$

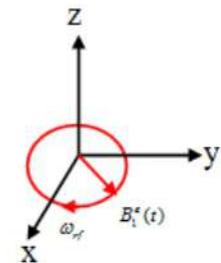
$$B_1(t) = B_1^e(t) \cos(\omega_{rf}t + \varphi) \vec{i} + B_1^e(t) \sin(\omega_{rf}t + \varphi) \vec{j}$$



جمله اول نشان دهنده حرکت در جهت عقربه‌های ساعت و جمله دوم خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

۲) میدان پلاریزه دایره‌ای:

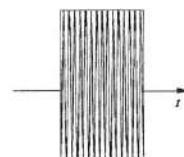
$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \end{bmatrix} , \quad B_1 = B_{1x} + iB_{1y} , \quad B_1(t) = B_1^e(t)e^{-i(\omega_{rf}t+\varphi)}$$



دو مثال از پوش پالس RF

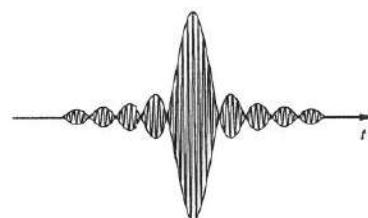
۱- پوش مربعی :

$$B_1^e(t) = B_1 \prod\left(\frac{t - \tau_p / 2}{\tau_p}\right) \quad \tau_p : duration$$



۲- پوش سینک (Sinc) :

$$B_1^e(t) = \begin{cases} B_1 \sin c(\pi f_\omega(t - \tau_p / 2)) & 0 < t < \tau_p \\ 0 & O.W \end{cases}$$

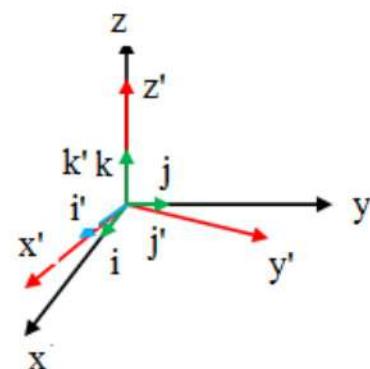


دستگاه مختصات دورانی (Rotating Frame of Reference)

دستگاه مختصات دورانی با سرعت زاویه‌ای در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.

$$\begin{cases} i' = \cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j} \\ j' = \sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j} \\ k' = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = \cos \omega t i' + \sin \omega t j' \\ \vec{j} = -\sin \omega t i' + \cos \omega t j' \\ k = k' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



مثال: اگر میدان الکترومغناطیسی $B_1(t)$ در سیستم مختصات ثابت دارای رابطه (۱) باشد. از دید ناظر واقع در سیستم دورانی، در این میدان به چه طورت دیده می‌شود. (سیستمی که با فرکانس ω_{rf} می‌چرخد).

$$B_1(t) = B_1^e(t)[\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j}] \quad (1)$$

$$B_{1,rot,x'y'} \triangleq B_{1,rot,x'} + iB_{1,rot,y'} \quad \text{سیستم دور} \quad \text{جواب:}$$

$$B_{1,xy} \triangleq B_{1,x} + iB_{1,y} \quad \text{سیستم ثابت}$$

$$\begin{aligned} B_{1,rot,x'y'} &= [\cos \omega t B_{1,x} - \sin \omega t B_{1,y}] + i[\sin \omega t B_{1,x} + \cos \omega t B_{1,y}] \\ &= [B_{1,x} + iB_{1,y}] e^{i\omega_f t} = B_{1,xy} e^{i\omega_f t} \end{aligned}$$

نرخ تغییرات بردار M مشاهده شده در دستگاه مختصات ثابت:

$$\frac{\partial M_{rot}}{\partial t} \quad \text{نرخ تغییرات بردار } M_{rot} \text{ مشاهده شده در دستگاه دور:}$$

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j} \\ \vec{j}' = \sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di'}{dt} = \omega [-\sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j}] \\ \frac{dj'}{dt} = \omega [\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j}] \\ \frac{dk'}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{di'}{dt} = \omega [-\sin \omega t (\cos \omega t \vec{i}' + \sin \omega t \vec{j}') - \cos \omega t (-\sin \omega t \vec{i}' + \cos \omega t \vec{j}')]$$

$$\begin{cases} \frac{di'}{dt} = -\omega \vec{j}' \\ \frac{dj'}{dt} = \omega \vec{i}' \\ \frac{dk'}{dt} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\vec{\omega} = -\omega \vec{k}'} \begin{cases} \frac{di'}{dt} = \omega \vec{i}' \\ \frac{dj'}{dt} = \omega \vec{j}' \\ \frac{dk'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}' = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} [M_x \vec{i}' + M_y \vec{j}' + M_z \vec{k}'] \\ &= \underbrace{\frac{dM_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dM_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dM_z}{dt} \vec{k}'}_{\frac{\partial M_{rot}}{\partial t}} + \underbrace{M_x \frac{di'}{dt} + M_y \frac{dj'}{dt} + M_z \frac{dk'}{dt}}_{from (\text{I})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{M}_{rot}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{M}_{rot} \\ \vec{\omega} = -\omega \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II})$$

معادله بلاک

مولفه طولی M_z در حالت تعادل قبل از به کار گیری RF.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} - \frac{M_z - M_z^0}{T_1} \vec{k} - \frac{M_x \vec{i} + M_y \vec{j}}{T_2} \\ M_z(0) = M_z^0, \quad M_y(0) = 0, \quad M_x(0) = 0 \end{cases} \quad T_1, T_2 : \text{relaxation parameters}$$

با استفاده از (I) می‌توان معادله بلاک را در دستگاه مختصات دوار نوشت:

$$\frac{\partial \vec{M}_{rot}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{M}_{rot} = \gamma \vec{M}_{rot} \times \vec{B}_{rot}$$

به دلیل اینکه طول پالس RF در مقایسه با ثابت‌های زمانی T_1 و T_2 بسیار کوچک است، می‌توان از دو قسم آخر معادله صرف نظر کرد:

$$\frac{\partial \vec{M}_{rot}}{\partial t} = \gamma \vec{M}_{rot} \times \underbrace{[\vec{B}_{rot} + \frac{\vec{\omega}}{\gamma}]}_{B_{eff}}$$

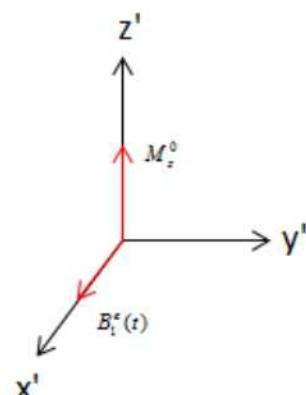
حل معادله بلاک در حالت تشید:

فرض می‌کنیم جسم دارای یک ایزوکرومات است (همه اسپین‌ها با یک سرعت می‌چرخند) و پالس RF نیز دارای فرکانس تشید $\omega_{rf} = \omega_0 = \gamma B_0$ است:

$$B_{1,rot}(t) = B_1^e(t) \vec{i}' \quad , \quad \vec{B}_{rot} = \vec{B}_{1,rot} + \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_{rot} = B_1^e(t) \vec{i}' + B_0 \vec{k}'$$

$$B_{eff} = B_1^e(t) \vec{i}' + B_0 \vec{k}' + \frac{\vec{\omega}}{\gamma} \Rightarrow \vec{B}_{eff} = B_1^e(t) \vec{i}' + B_0 \vec{k}' - B_0 \vec{k}'$$

$$\vec{M}_{rot} \times \vec{B}_{eff} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ M_x & M_y & M_z \\ B_1^e(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = M_z B_1^e(t) \vec{j} - M_y B_1^e(t) \vec{k}$$



$$\text{معادله بلاک: } \begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = 0 \\ \frac{dM_y}{dt} = \gamma M_z B_1^e(t) \\ \frac{dM_z}{dt} = -\gamma M_y B_1^e(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} M_x(0) = 0 \\ M_y(0) = 0 \\ M_z(0) = M_z^0 \end{cases}$$

$$M_{y'z'} \triangleq M_y + iM_z \Rightarrow \frac{dM_{y'z'}}{dt} = \gamma M_z B_1^e(t) - i\gamma M_y B_1^e(t)$$

$$\begin{cases} \frac{dM_{y'z'}}{dt} = \gamma B_1^e(t)(-iM_{y'z'}) \\ M_{y'z'}(0) = iM_z^0 \end{cases} \Rightarrow M_{y'z'}(t) = M_{y'z'}(0) e^{-i\gamma \int_0^t B_1^e(\alpha) d\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x(t) = 0 \\ M_y(t) = M_z^0 \sin(\gamma \int_0^t B_1^e(\alpha) d\alpha) \\ M_z(t) = M_z^0 \cos(\gamma \int_0^t B_1^e(\alpha) d\alpha) \end{cases}, \quad 0 < t < \tau_p$$

مثال:

$$B_1^e(t) = \prod \left(\frac{t - \tau_p / 2}{\tau_p} \right) \quad \alpha = \gamma B_1 \tau_p$$

$$\begin{cases} M_x(t) = 0 \\ M_y(t) = M_z^0 \sin(\gamma B_1 t) \\ M_z(t) = M_z^0 \cos(\gamma B_1 t) \end{cases}$$

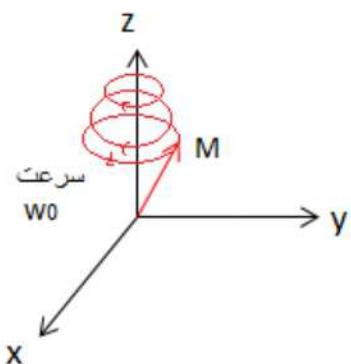
$$\alpha = \gamma \int_0^{\tau_p} B_1^e(t) dt$$

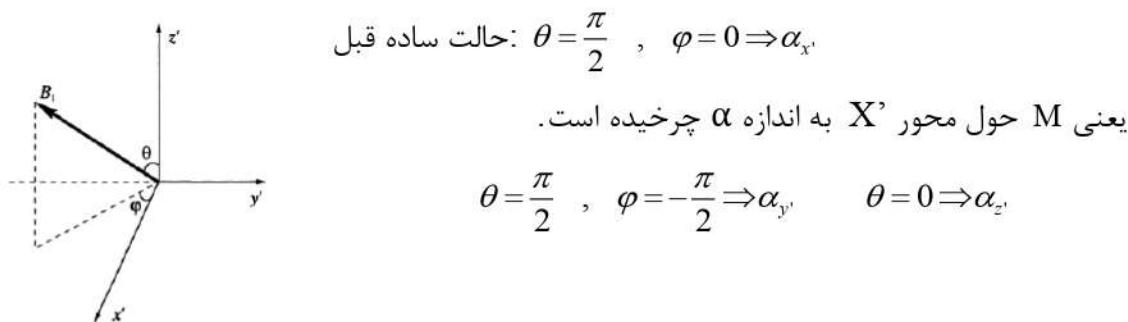
دوران(چرخش) مغناطیس شدگی M تحت تاثیر پالس RF را forced precession می‌گویند.

مقدار زاویه چرخش α :

$$\left[\begin{array}{l} \text{دامنه پالس } B_1 : \text{RF} \\ \text{مدت زمان پالس } \tau_p : \text{RF} \end{array} \right]$$

وضعیت M در حین به کارگیری پالس RF از دید ناظر خارجی ساکن:





با صرف نظر از طولس پالس RF، می‌توان عملکرد این پالس را با یک اپراتور چرخش روی بردار M به صورت زیر نشان داد.

$$M_{rot}(0_-) \xrightarrow{R(\alpha)} M_{rot}(0_+)$$

مثال: پالس RF در راستای 'x' در میان

$$R_x'(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad M_{rot} = \begin{bmatrix} M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} \quad \alpha = \gamma B_1 \tau_p$$

حالات اول: $\alpha_{z'}$

حالات دوم: $\alpha_{y'}$

حالات سوم: $\alpha_{x'}$

$$R_y'(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad R_z'(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالات چهارم: α_φ , $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_\varphi(\alpha) = ?$

چرخش به اندازه φ حول محور 'z'

چرخش به اندازه α حول محور 'x'

$$R_\phi(\alpha) = R_z(\phi)R_x(\alpha)R_z(-\phi) \quad , \quad \hat{\theta} = -\frac{\pi}{2} + \theta$$

$\alpha_{(\phi, \theta)}$ pulse: $\overrightarrow{M_{rot}}(0_+) = R_z(\alpha)R_y(\hat{\theta})R_y(-\hat{\theta})R_z(-\phi)\overrightarrow{M_{rot}}(0_-)$

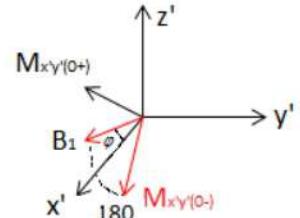
مثال:

$$M_{x'y'}(0_-) \xrightarrow{\pi_\phi} M_{x'y'}(0_+)$$

$$R_\phi(\pi) = R_z(\phi).R_x(\pi).R_z(-\phi)$$

$$R_\phi(\pi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\phi(\pi) = -\begin{bmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} M_x(0_+) \\ M_y(0_+) \end{bmatrix} = R_\phi(\pi) \begin{bmatrix} M_x(0_-) \\ M_y(0_-) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_x(0_+) = \cos 2\phi M_x(0_-) - \sin 2\phi M_y(0_-) \\ M_y(0_+) = -\sin 2\phi M_x(0_-) - \cos 2\phi M_y(0_-) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_{x'y'}(0_+) = M_x(0_+) + iM_y(0_+) = (M_x(0_-) - iM_y(0_-))(\cos z\phi - i \sin z\phi)$$

$$\Rightarrow M_{x'y'}(0_+) = M_{x'y'}^*(0_-) e^{-iz\phi}$$

حالت خاص:

$$\phi = 0 \quad 180_{x'} : M_{x'y'} \rightarrow M_{x'y'}^*$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \quad 180_{y'} : M_{x'y'} \rightarrow -M_{x'y'}^*$$

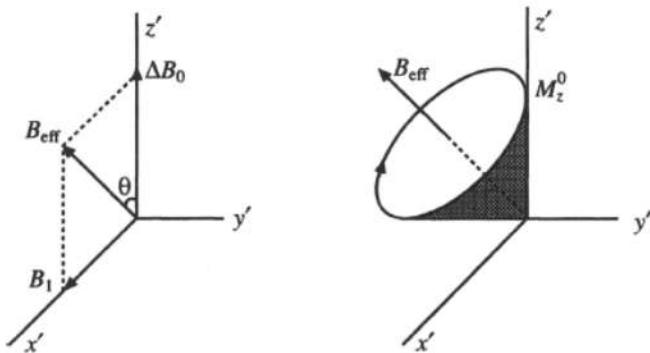
تحریک خارج از تشید

فرض کنید جسم دارای ایزوکروماتی با فرکانس تشید ω_0 باشد ولی پالس RF دارای فرکانس ω_{rf} باشد

$$\omega_{rf} = \omega_0 - \Delta\omega_0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{B_{1,rot}}(t) = B_1^e(t)i' \\ \frac{\partial \overrightarrow{M_{rot}}}{\partial t} = \gamma \overrightarrow{M_{rot}} \times \overrightarrow{B_{eff}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{B_{eff}} = B_1^e(t)i' + B_0 \vec{k} - \frac{\omega_{rf}}{\gamma} \vec{k} \\ = B_1^e(t)i' + \frac{\Delta\omega_0}{\gamma} \vec{k} \end{cases}$$

$$\frac{dM_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dM_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dM_{z'}}{dt} \vec{k}' = \gamma \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ M_x & M_y & M_z \\ B_1^e(t) & 0 & \frac{\Delta\omega_0}{\gamma} \end{vmatrix}$$



تحریک برای حالت خاص که $B_1^e(t)$ یک پالس مربعی باشد.

$$\begin{cases} M_x(t) = M_z^0 \sin \theta \cos \theta (1 - \cos \omega_{eff} t) \\ M_y(t) = M_z^0 \sin \theta \sin(\omega_{eff} t) \\ M_z(t) = M_z^0 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos(\omega_{eff} t)] \end{cases} \quad 0 < t < \tau_p$$

$$\begin{cases} \omega_{eff} = \sqrt{\Delta\omega_0^2 + \omega_1^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\omega_1}{\Delta\omega_0} \end{cases}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{M_x(0^+)}{M_y(0^+)} = (\tan \frac{\alpha}{2})(\frac{\Delta\omega_0}{\omega_{eff}}) \quad \text{زاویه } \varphi_0 \text{ با محور } y'$$

کاهش دامنه مولفه عرضی M بعداز پالس RF نسبت به حالت تشید:

$$M_y(0^+) = \sqrt{M_x^2(0^+) + M_y^2(0^+)} = M_z^0 \underbrace{\sin \theta \sqrt{\sin^2(\alpha) + (1 - \cos \alpha)^2 \cos^2(\theta)}}_{\sin \alpha}$$

تحریک انتخابی : Frequency selectivity of RF pulse



به طور ضمنی فرض کنید $FB_1^e(-\omega) = FB_1^e(\omega)$

$$B_1^e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} FB_1^e(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} FB_1^e(\omega) e^{-i(\omega + \omega_{rf})t} d\omega$$

لذا پالس RF را می‌توان مجموعی از ریزآرایه‌های $FB_1^e(\omega) e^{-i(\omega + \omega_{rf})t}$ دانست. هر ریزآرایه به منزله یک پالس RF تک فرکانس تلقی می‌شود که دارای دامنه $|FB_1^e(\omega)|$ ، فرکانس $\omega + \omega_{rf}$ و فاز $\phi(\omega)$ است.

$$FB_1^e(\omega) = |FB_1^e(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$\omega = 0 \quad : \quad |FB_1^e(\omega)| \quad \omega_{rf} \quad \phi(0) = 0$$

انحراف ایجاد شده در ایزوکرومات $\alpha(\omega = 0) = \alpha(0)$:

$$\begin{aligned} & |FB_1^e(0)| \quad \alpha(0) \\ & |FB_1^e(\omega)| \quad \alpha(\omega) = \alpha(0) \frac{|FB_1^e(\omega)|}{|FB_1^e(0)|} \Rightarrow \alpha(\omega) \propto |FB_1^e(\omega)| \end{aligned}$$

اگر پهنانی $|FB_1^e(\omega)|$ کم باشد، duration پالس RF زیاد می‌شود.

اگر پهنانی فرکانسی $|FB_1^e(\omega)|$ زیاد باشد آنگاه nonselective pulse or hard pulse را داریم.

چرخش آزاد و استراحت Relaxation and Free Precession

معادله بلاک در شرایط بعد از اتمام پالس RF :

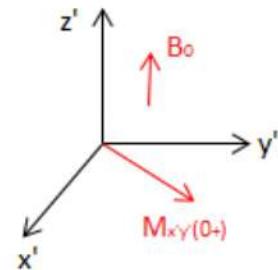
$$\begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} - \frac{M_x' i' + M_y' j'}{T_2} - \frac{M_z^0 - M_z^0}{T_1} k', \\ \vec{B}_{eff} = B_0 \vec{k} - \frac{\gamma B_0}{\gamma} \vec{k} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dM_z'}{dt} \vec{k}' + \frac{dM_x'}{dt} i' + \frac{dM_y'}{dt} j' = -\frac{M_x' i' + M_y' j'}{T_2} - \frac{M_z^0 - M_z^0}{T_1} k'$$

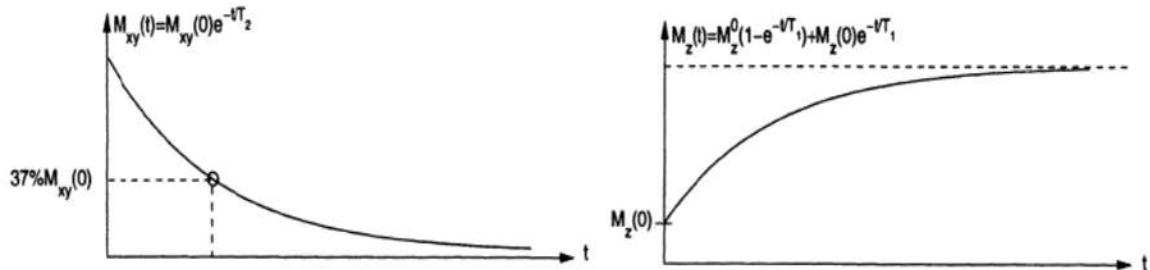
$$M_{x'y'} = M_{x'} + iM_{y'}$$

$$\begin{cases} \frac{dM_z'}{dt} = -\frac{M_z^0 - M_z^0}{T_1} \\ M_z'(0^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dM_{x'y'}}{dt} = -\frac{M_{x'y'}}{T_1} \\ M_{x'y'}(0^+) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} M_z(t) = M_z^0 + (M_z'(0^+) - M_z^0)e^{-t/T_1} \\ M_{x'y'}(t) = M_{x'y'}(0^+)e^{-t/T_2} \end{cases}$$



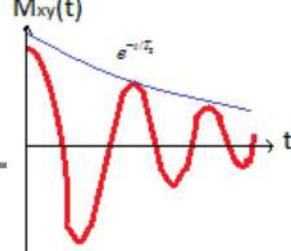
به فرآیند بازگشت M_z' به حالت تعادل longitudinal rel. می‌گویند.

ثابت زمانی استراحت طولی: T_1

به فرآیند میرا شدن $M_{x'y'}$ استراحت عرضی transverse rel. می‌گویند.

ثابت زمانی استراحت عرضی: T_2

از دید ناظر اصلی:



$$M_{xy} = M_{x'y'} e^{-i\omega_0 t}$$

$$M_{xy}(t) = M_{x'y'}(0^+) e^{-i\omega_0 t} e^{-t/T_2}$$

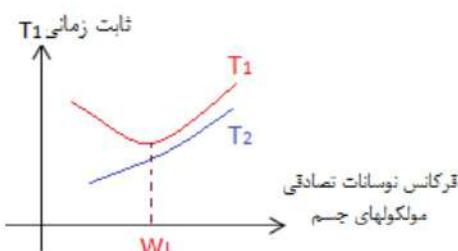
$$M_z(t) = M_z(t)$$

استراحت طولی longitudinal relaxation

به فرآیند بازگشت مولفه طولی مغناطیس شدگی به علت تعادل (راستای محور Z) اطلاق می‌شود به آن spin - lattice-relaxation نیز گفته می‌شود.

ثابت زمانی این فرآیند (T_1) بستگی به نوع ماده (بافت) و شدت میدان خارجی دارد.

در طی این فرآیند اسپین‌ها انرژی دریافت شده در هنگام اعمال پالس تحریک را به محیط اطراف منتقل می‌کند این انتقال در فرکانس‌های دور صورت می‌گیرد.



استراحت عرضی Transverse relaxation:

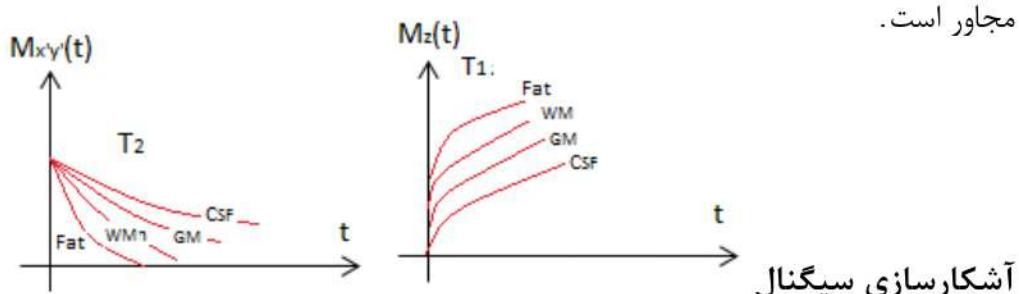
به فرآیند میرا شدن مولفه عرضی مغناطیس شدگی اطلاق می‌شود به آن spin-spin relaxation نیز گفته می‌شود.

ثابت زمانی این فرآیند (T_2) به نوع ماده و شدت میدان خارجی بستگی دارد.

هر پدیده‌ای که عامل ایجاد استراحت طولی باشد باعث استراحت عرضی نیز می‌شود.

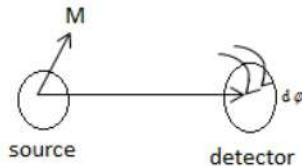
لذا برای هر ماده $T_2 < T_1$

عامل اصلی میرا شدن مولفه عرضی از دست رفتن همفازی اسپین‌ها در اثر برهمکنش، بین اسپین‌های مجاور است.



سیگنال تشیدید مغناطیسی ولتاژی است که بر اثر تغییر شار مغناطیسی عبوری از کویل گیرنده در آن

$$V(t) = \frac{-d}{dt} \varphi(t)$$



القا می شود. (بر مبنای قانون فارادی)

$$\vec{M} = di.d\vec{A} \Rightarrow d\varphi = dB.d\vec{A} = d\vec{B}. \frac{\vec{M}}{di} = \frac{d\vec{B}}{di}. \vec{M} = \vec{B}_r(r). \vec{M}$$

اگر در اثر برقراری جریان واحد در کویل گیرنده، در فاصله r از آن، میدان حاصل را $B_r(r)$ بنامیم:

$$V(t) = \frac{-d}{dt} \int d\varphi = \frac{-d}{dt} \int \vec{B}_r(r). \vec{M}_r(r, t) dr$$

$$\vec{B}_r(r) = \begin{bmatrix} \vec{B}_{r,x}(r) \\ \vec{B}_{r,y}(r) \\ \vec{B}_{r,z}(r) \end{bmatrix}, \quad \vec{M}_r(r, t) = \begin{bmatrix} \vec{M}_{r,x}(r, t) \\ \vec{M}_{r,y}(r, t) \\ \vec{M}_{r,z}(r, t) \end{bmatrix}$$

$$V(t) = - \int [\vec{B}_{r,x}(r) \frac{d\vec{M}_{r,x}(r, t)}{dt} + \vec{B}_{r,y}(r) \frac{d\vec{M}_{r,y}(r, t)}{dt} + \vec{B}_{r,z}(r) \frac{d\vec{M}_{r,z}(r, t)}{dt}] dr$$

با توجه به کوچک بودن تغییرات عبارت سوم (تغییرات مولفه طولی ممان مغناطیسی) می‌توان از آن صرف نظر کرد. لذا:

$$V(t) = - \int [\vec{B}_{r,x}(r) \frac{d\vec{M}_{r,x}(r, t)}{dt} + \vec{B}_{r,y}(r) \frac{d\vec{M}_{r,y}(r, t)}{dt}] dr$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_{r,x}(r) &= |\vec{B}_{r,xy}(r)| \cos \varphi_r(r) \\ \vec{B}_{r,y}(r) &= |\vec{B}_{r,xy}(r)| \sin \varphi_r(r) \end{aligned} \right\} \quad \leftarrow \quad \vec{B}_{r,xy}(r) \triangleq |\vec{B}_{r,xy}(r)| e^{i\varphi_r(r)} : \text{فرض}$$

$$\vec{M}_{xy}(r, t) = |M_{xy}(r, 0)| e^{i\varphi_e(r)}. \underbrace{e^{-t/T_2(r)}}_{\text{transvererelaxation}}. \underbrace{e^{-i\omega(r)t}}_{\text{free precession}}$$

$$M_x(r, t) = |M_{xy}(r, 0)| e^{-t/T_2(r)} \cos(-\omega(r)t + \varphi_e(r))$$

$$M_y(r, t) = |M_{xy}(r, 0)| e^{-t/T_2(r)} \sin(-\omega(r)t + \varphi_e(r))$$

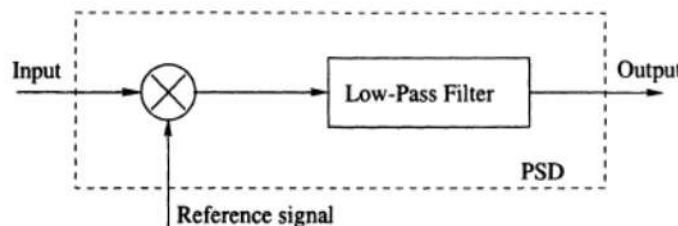
بعد از مشتق گیری، با توجه به آنکه $1/T_2 \ll \omega(r)$ می‌توان از یکی از ترم‌های ظاهر شده در مشتق صرف نظر کرد. معادله ولتاژ القا شده در سیم پیچ گیرنده برابر خواهد بود با

$$V(t) = - \int_{object} \omega(r) |M_{x,y}(r, 0)| |B_{r,xy}(r)| e^{-t/T_2(r)} \sin[-\omega(r)t + \varphi_e(r) - \varphi_r(r)] dr$$

سیگنال باید دمودله شود و بعد به ADC اعمال شود.

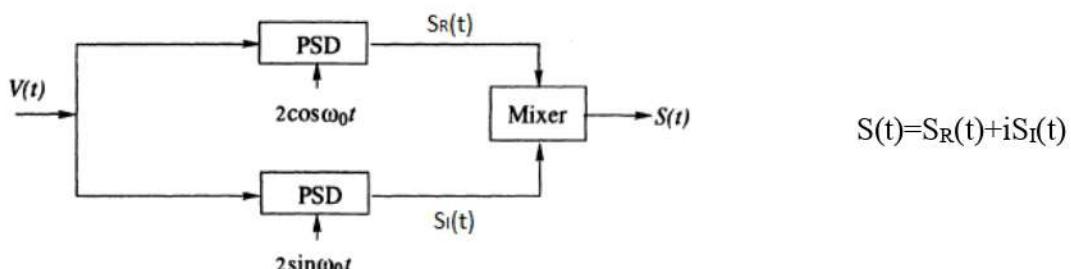
آشکار سازی حساس به فاز Phase sensitive detection

- از آنجاییکه فرکانس ولتاژ القا شده در کویل گیرنده، بسیار بالا است و از طرفی اطلاعات مفید و مطلوب در حوالی این فرکانس بالا قرار دارند. طی یک مرحله دمودلاسیون demodulation سیگنال تشید مغناطیسی را به محدوده فرکانسی پایین منتقل می‌کنند.



$$V_{Psd}(t) = \int_{object} \omega(r) |M_{x,y}(r, 0)| |B_{r,xy}(r)| \cos[-\Delta\omega_r t + \varphi_e(r) - \varphi_r(r) + \frac{\pi}{2}] dr$$

یک سیستم کاملتر:



$$S(t) = \omega_0 e^{\frac{i\pi}{2}} \int_{object} M_{x,y}(r, 0) B_{r,xy}^*(r) e^{-t/T_2(r)} \cdot e^{-i\Delta\omega(r)t} dr$$